• Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ kann mit obiger Identifizierung als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}\colon X \to 2^{X^*}$ aufgefaßt werden. Die Definiton 1.1 der Monotonie als Operator A ist mit der Definition 3.2 der Monotonie als mehrdeutige Abbildung $\bar{A}$ identisch. Ein Operator $A\colon D(A) \subseteq X \to X^*$ heißt *maximal monoton* genau dann, wenn A monoton ist, und aus $(u, u^*) \in X \times X^*$ sowie

$$\langle u^* - Av, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad\qquad \forall v \in D(A)$$

folgt, dass $u \in D(A)$ und $u^* = Au$ gelten.

Die einfachsten Beispiele maximal monotoner Operatoren sind reelle Funktionen. Jede monoton wachsende, und möglicherweise unstetige, Funktion erzeugt offensichtlich einen monotonen Operator. Ferner gilt

3.3 Lemma. *Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und stetige Funktion. Dann ist f maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und es gelte für alle $v \in \mathbb{R}$

$$\big(u^* - f(v)\big)(u - v) \ge 0\,.$$

Es ist zu zeigen, dass $u^* = f(u)$ gilt, denn $u \in \mathbb{R} = D(f)$ wurde ja vorausgesetzt. Für $u > v$ haben wir $u^* - f(v) \ge 0$, d.h. $u^* \ge f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, mit einer Folge (u_n), für die gilt: $u_n \nearrow u$, $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f impliziert $u^* \ge f(u)$. Für $u < v$ gilt $u^* \le f(v)$. Wir wählen nun $v = u_n$, wobei (u_n) eine Folge ist mit $u_n \searrow u$, $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von f liefert $u^* \le f(u)$. Somit gilt sowohl $u^* \ge f(u)$ als auch $u^* \le f(u)$, d.h. $u^* = f(u)$. ■

Durch ein einfaches Gegenbeispiel überlegt man sich, dass unstetige monoton wachsende Funktionen nicht maximal monoton sein müssen. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \le 0\,, \\ x + 1 & \text{für } x > 0\,, \end{cases}$$

d.h. f ist monoton wachsend, aber nicht stetig. Diese Funktion f ist *nicht* maximal monoton. Um dies zu beweisen wählen wir $(u, u^*) = (0, \frac{1}{2}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und zeigen, dass für alle $v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$-\big(\frac{1}{2} - f(v)\big)v \ge 0\,.$$

In der Tat, im Falle $v > 0$ haben wir $-(\frac{1}{2} - (v + 1))v = (v + \frac{1}{2})v \ge 0$. Und im Falle $v \le 0$ haben wir $(v - \frac{1}{2})v \ge 0$. Allerdings ist $f(0) = 0 \ne \frac{1}{2}$.

Eine zu Lemma 3.3 analoge Aussage erhalten wir auch für monotone Operatoren.

3.4 Lemma. *Sei X ein reflexiver, reeller Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner, hemistetiger Operator. Dann ist A maximal monoton.*

Beweis. Sei $(u, u^*) \in X \times X^*$ und es gelte für alle $v \in X$

$$\langle u^* - Av, u - v \rangle \geq 0\,.$$

Wir setzen $v = u \pm tw$ mit $w \in X$ und $t > 0$. Dann folgt für alle $w \in X$

$$\mp t \langle u^* - A(u \pm tw), w \rangle \geq 0\,,$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \langle u^* - A(u + tw), w \rangle &\leq 0\,, \\ \langle u^* - A(u - tw), w \rangle &\geq 0\,. \end{aligned}$$

Da A hemistetig ist, folgt im Grenzübergang $t \to 0^+$, dass für alle $v \in X$ gilt:

$$\langle u^* - Au, w \rangle = 0\,,$$

d.h. $u^* = Au$ ∎

• Die inverse Abbildung $A^{-1}\colon X^* \to 2^X$ einer maximal monotonen Abbildung $A\colon X \to 2^{X^*}$ auf einem reflexiven Banachraum X ist wieder maximal monoton, denn

$$G(A^{-1}) = \{(u^*, u) \in X^* \times X \,\big|\, (u, u^*) \in G(A)\}$$

und $\langle u^*, u \rangle_X = \langle u, u^* \rangle_{X^*}$ für alle $(u, u^*) \in X \times X^*$, da X reflexiv ist. Hierbei haben wir benutzt, dass $X \cong X^{**}$.

3.3.1 Zeitableitungen

In der modernen Mathematik werden bei der Untersuchung von parabolischen Differentialgleichungen und Evolutionsgleichungen die Ort– und Zeitvariablen unterschiedlich behandelt. Was heißt das?

In Gleichungen dieser Art ist die Unbekannte eine Funktion $u \in X$, wobei X ein Funktionenraum ist, dessen Elemente auf dem Raum–Zeitzylinder $I \times \Omega$, wobei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$ ist und $I = [0, T]$ ein gegebenes Zeitintervall ist, definiert sind, d.h. $u\colon I \times \Omega \to \mathbb{R}$. Nun kann man u durch die Vorschrift

$$[\tilde{u}(t)](x) := u(t, x)$$

mit einer Abbildung $\tilde{u}\colon I \to Y$ assoziieren, wobei Y ein Funktionenraum ist, dessen Elemente nur auf Ω definiert sind. Somit können wir also für alle $t \in I$ die Funktion $\tilde{u}(t)\colon \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(t, x)$, als ein Element eines Funktionenraumes interpretieren. Damit haben wir zwei Sichtweisen für u: Einmal kann man u als Funktion in Ort und Zeit betrachten, andererseits als Funktion in der Zeit mit Werten in einem Funktionenraum. Im Weiteren werden wir die zweite Sichtweise benutzen.

Eine weitere Besonderheit bei der Behandlung parabolischer Differentialgleichungen besteht darin, dass in natürlicher Weise *mehrere* Funktionenräume auftreten. Wir wollen dies am Beispiel der *Wärmeleitungsgleichung*

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u &= f && \text{in } \Omega \times I, \\
u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times I, \\
u(0) &= u_0 && \text{in } \Omega\,,
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

illustrieren. Sei u eine glatte Lösung von (3.5), die dann natürlich auch die schwache Formulierung von (3.5) erfüllt, d.h. für alle $\varphi \in L^2(I; W_0^{1,2}(\Omega))$ gilt:

$$
\int_I \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\, \varphi \, dx\, dt + \int_I \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx\, dt = \int_I \int_\Omega f\varphi \, dx\, dt\,. \tag{3.6}
$$

Wenn wir nun $\varphi = u$ wählen, erhalten wir, mithilfe partieller Integration und der Young–Ungleichung, die *apriori Abschätzung*

$$
\|u\|^2_{L^\infty(I;L^2(\Omega))} + \|u\|^2_{L^2(I;W_0^{1,2}(\Omega))} \le c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right). \tag{3.7}
$$

Mithilfe dieser Abschätzung erhält man, wenn man (3.6) als Gleichung für $\frac{\partial u}{\partial t}$ auffasst, die Abschätzung

$$
\left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L^2(I;(W_0^{1,2}(\Omega))^*)} \le c\left(\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}, \|f\|^2_{L^2(I;L^2(\Omega))}\right). \tag{3.8}
$$

Also benötigt man zur Behandlung der Wärmeleitungsgleichung in natürlicher Weise die Räume $L^2(\Omega)$, $W_0^{1,2}(\Omega)$ und $W^{-1,2}(\Omega) := (W_0^{1,2}(\Omega))^*$.

Wir wollen nun einen Spezialfall der Theorie *verallgemeinerter Zeitableitungen* entwickeln. Eine ausführliche Darstellung kann man z.B. in [**?**, Kapitel 4] oder [**?**] finden.

Sei V ein Banachraum und H ein Hilbertraum mit

$$
V \hookrightarrow H \cong H^* \hookrightarrow V^*\,.
$$

Außerdem sei V dicht in H, d.h. $\overline{V}^{\|\cdot\|_H} = H$. Ein solches Tripel (V, H, V^*) heißt **Gelfand–Tripel**. Ein typisches Beispiel für ein Gelfand–Tripel ist $(W_0^{1,2}(\Omega), L^2(\Omega), W^{-1,2}(\Omega))$, also genau die Räume, die in natürlicher Weise bei der Behandlung der Wärmeleitungsgleichung auftreten.

Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel. Dann wird für alle $h \in H$ durch

$$
\langle \bar{h}, v\rangle_V := (h, v)_H\,, \qquad v \in V\,,
$$

ein stetiges lineares Funktional $\bar{h} \in V^*$ definiert. Die Zuordnung $h \mapsto \bar{h}$ aufgefasst als Abbildung von H nach V^* ist linear, stetig und injektiv. Daher kann man $\bar{h}$ mit h identifizieren. In diesem Sinne haben wir also $H \hookrightarrow V^*$ und für alle $h \in H$ und alle $v \in V$ gilt:

$$\langle h, v\rangle_V = (h, v)_H \,.$$

Dies zusammen mit der Symmetrie des Skalarproduktes in H liefert für alle $v, w \in V$

$$\langle v, w\rangle_V = (v, w)_H = (w, v)_H = \langle w, v\rangle_V \,.$$

3.9 Definition. *Sei $u \in L^p(I;V), 1 < p < \infty$ und (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel. Dann definieren wir die **verallgemeinerte Zeitableitung** $\frac{du}{dt}$ als ein Element des Raumes $L^{p'}(I;V^*)$, $\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$, für das gilt:*

$$\int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}(t), v\Big\rangle_V \varphi(t)\, dt = -\int_0^T (u(t), v)_H\, \varphi'(t)\, dt \quad \forall v \in V\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})\,.$$

• Im allgemeinen ist $\frac{du}{dt}$ *nicht* mit der distributionellen Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ identisch. Die distributionelle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist nämlich auf Q_T definiert durch

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\, \varphi\, dx\, dt = -\int_0^T \int_\Omega u\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dx\, dt \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q_T).$$

Beide Ableitungen stimmen jedoch überein, falls $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in V liegt.

Im Folgenden bezeichnen wir für $I = [0, T]$

$$\begin{aligned} W &:= \Big\{u \in L^p(I;V) \;\Big|\; \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)\Big\}\,, \\ \|u\|_W &= \|u\|_{L^p(I;V)} + \Big\|\frac{du}{dt}\Big\|_{L^{p'}(I;V^*)} \,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

$(W, \|\cdot\|_W)$ ist ein Banachraum. Dieser ist reflexiv, falls $1 < p < \infty$ und V reflexiv ist.

3.11 Lemma. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel und sei W in (3.10) definiert. Dann gilt die stetige Einbettung*

$$W \hookrightarrow C(I;H)\,,$$

und für alle $u \in W$ und alle $s, t \in I$ gilt:

$$\int_s^t \Big\langle \frac{du}{dt}(\tau)\,,\, u(\tau)\Big\rangle_V d\tau = \frac{1}{2}\|u(t)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|u(s)\|_H^2 \,.$$

Beweis. 1. Der Beweis ist technisch und benutzt viele Approximationsargumente. Er findet sich z.B. in [**?**, S. 147] oder in [**?**, S. 422].

2. Das Resultat ist das Analogon zur folgenden Rechnung für reellwertige Funktionen $u\colon I \to \mathbb{R}$:

$$\int_s^t u'(t)u(t)\,dt = \int_s^t \frac{1}{2}(u^2(t))'\,dt = \frac{1}{2}|u(t)|^2 - \frac{1}{2}|u(s)|^2$$

(cf. [**?**, S. 147], [**?**, S. 422]). ■

3.12 Lemma. *Sei (V, H, V^*) ein Gelfand–Tripel, und sei der Raum W in (3.10) definiert. Ferner sei $L\colon D(L) \subseteq L^p(I;V) \to L^{p'}(I;V^*)$, definiert durch*

$$\begin{aligned} Lu &:= \frac{du}{dt}, \\ D(L) &:= \{u \in W \mid u(0) = 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist L ein linearer maximal monotoner Operator auf $D(L)$.

Beweis. 1. L ist per Definition linear.

2. L ist monoton: Seien u, $v \in D(L)$, dann gilt nach Lemma 3.11

$$\begin{aligned} \langle Lu - Lv, u - v\rangle_{L^p(I;V)} &= \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_{L^p(I;V)} \\ &= \int_0^T \Big\langle \frac{d(u-v)}{dt}, u - v\Big\rangle_V\,dt \\ &= \frac{1}{2}\|(u-v)(T)\|_H^2 - \frac{1}{2}\|(u-v)(0)\|_H^2 \\ &\geq 0\,, \end{aligned}$$

da u, $v \in D(L)$, und somit $u(0) = v(0) = 0$.

3. L ist maximal monoton: Sei $v \in L^p(I;V)$, $w \in L^{p'}(I;V^*)$, und es gelte für alle $u \in D(L)$

$$\langle w - Lu, v - u\rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \langle w - Lu, v - u\rangle_V\,dt \geq 0\,. \tag{3.13}$$

Wir müssen $v \in D(L)$ und $w = \frac{dv}{dt}$ zeigen. Wir wählen $u = \varphi(t)z \in L^p(I;V)$ mit $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, $z \in V$. Es gilt $u(0) = 0$ und $\frac{du}{dt} = \varphi'(t)z \in L^{p'}(I;V^*)$, da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$, und damit $u \in D(L)$. Außerdem haben wir

$$\langle Lu, u\rangle_{L^p(I;V)} = \int_0^T \Big\langle \frac{du}{dt}, u\Big\rangle_V\,dt = \frac{1}{2}\Big(\|u(T)\|_H^2 - \|u(0)\|_H^2\Big) = 0\,, \tag{3.14}$$

da $\varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R})$. Wenn wir u in (3.13) einsetzen und (3.14) benutzen, erhalten wir

$$0 \le \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle w, \varphi z\rangle_V - \langle \varphi' z, v\rangle_V \, dt + 0 \,.$$

Nun gilt aber $\langle z, u\rangle_V = \langle u, z\rangle_V$ für alle u, $z \in V$ und somit

$$0 \le \int_0^T \langle w, v\rangle_V \, dt - \int_0^T \langle \varphi' v + \varphi w, z\rangle_V \, dt \,.$$

Da $z \in V$ aber beliebig war, gilt die Ungleichung auch für $-z$ und für λz, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig groß werden kann. Außerdem ist $\langle w, v\rangle_V$ unabhängig von z. Damit die Ungleichung für alle z richtig ist, muß daher gelten

$$\int_0^T \varphi \langle w, z\rangle_V + \varphi'(v, z)_H \, dt = 0 \qquad \forall z \in V \,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(I;\mathbb{R}) \,,$$

d.h. $w = \frac{dv}{dt}$ und somit erhalten wir $\frac{dv}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)$, d.h. $v \in W$. Zu zeigen bleibt, dass $v \in D(L)$. Nach Voraussetzung gilt für alle $u \in D(L)$

$$\begin{aligned} 0 \le \langle Lv - Lu, v - u\rangle_{L^p(I;V)} &= \int_0^T \Big\langle \frac{d(v-u)}{dt}, v - u \Big\rangle_V \, dt \qquad (3.15) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u(T)\|_H^2 - \|v(0) - u(0)\|_H^2 \Big) \,, \end{aligned}$$

da $v \in W$. Wir wählen eine Folge $(a_n) \subset V$ mit $a_n T \to v(T)$ in H $(n \to \infty)$. Wir definieren nun $u_n(t) = a_n t$, $u_n \in D(L)$, setzen u_n in (3.15) ein, und erhalten

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - u_n(T)\|_H^2 - \|v(0) - u_n(0)\|_H^2 \Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|v(T) - a_n T\|_H^2 - \|v(0)\|_H^2 \Big) \,. \end{aligned}$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daraus

$$0 \le -\frac{1}{2}\|v(0)\|_H^2 \,,$$

d.h. $v(0) = 0$ und somit $v \in D(L)$. ■

3.3.2 Der Satz von Browder

Ähnlich wie in den vorangegangenen Abschnitten wollen wir die Lösbarkeit von

$$b \in Au + Bu\,, \qquad\qquad u \in C\,, \tag{3.16}$$

untersuchen, wobei $A\colon C \subseteq X \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator ist und $B\colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner Operator ist. Die Beziehung (3.16) bedeutet, wenn A, B mehrdeutige Abbildungen sind, dass wir für gegebenes $b \in X^*$ ein $u \in C$ suchen so, dass gilt:

$$b = v + w\,, \qquad \text{mit } v \in Au\,,\ w \in Bu\,.$$

Wenn A und B Operatoren sind, dann ist (3.16) äquivalent zu

$$b = Au + Bu\,, \qquad u \in C\,.$$

3.17 Satz (Browder, 1968). *Sei $C \subseteq X$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge eines reellen, reflexiven Banachraumes X. Sei $A\colon C \to 2^{X^*}$ ein maximal monotoner Operator und $B\colon C \to X^*$ ein pseudomonotoner, beschränkter und demistetiger Operator. Falls C unbeschränkt ist, sei B koerziv bezüglich A und eines festen Elements $b \in X^*$, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$, und eine Zahl $r > 0$ so, dass*

$$\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle, \qquad \forall u \in C \text{ mit } \|u\| > r$$

Dann existiert für dieses $b \in X^*$ eine Lösung $u \in C \cap D(A)$ des Problems (3.16).

Beweis. Die Strategie, die diesem Beweis zugrunde liegt, ist folgende:

- Galerkin–Approximation; aber diesesmal führen wir sie nicht mit Gleichungen sondern mit Ungleichungen durch.
- Lösbarkeit der Galerkin–Ungleichungen; hierzu verwenden wir ein Abschneide–Argument.
- Apriori Schranken für die Lösung der Galerkin–Ungleichungen; diese folgen aus der Koerzivität von B.
- Konvergenz der Galerkin–Methode; diese basiert auf der Pseudomonotonie von B.

Da $A\colon C \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist und C nichtleer, ist auch der Graph von A nicht leer. In der Tat, angenommen er sei leer, dann ist die Bedingung

$$\langle u^* - v^*, u - v\rangle \ge 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A$$

für $(u, u^*) \in C \times X^*$ erfüllt, da der Graph von A leer ist. Daraus folgt $(u, u^*) \in A$, da A maximal monoton ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Also existiert $(u_0, u_0^*) \in A$.
O.E.d.A. sei $u_0 = 0$ und $u_0^* = 0$, d.h. $(0, 0) \in A$. Ansonsten gehen wir vom Problem

$$b \in Au + Bu\,, \qquad\qquad u \in C\,,$$

über zu

$$b - u_0^* \in \bar{A}v + \bar{B}v\,, \qquad\qquad v \in C - u_0\,,$$

wobei $\bar{A}v := A(v + u_0)$ und $\bar{B}v := B(v + u_0) - u_0^*$. Aufgrund der Definition von $\bar{A}$ erhalten wir, dass gilt: $(v, v^*) \in \bar{A} \;\Leftrightarrow\; (v + u_0, v^*) \in A$. Sei nun $(u, u^*) \in (C - u_0) \times X^*$ derart, dass für alle $(v, v^*) \in \bar{A}$ gilt:

$$0 \le \langle u^* - v^*, u - v\rangle = \langle u^* - v^*, u + u_0 - (v + u_0)\rangle\,.$$

Dies zusammen mit der maximalen Monotonie von $A : C \to 2^{X^*}$ impliziert, dass auch $\bar{A}\colon C - u_0 \to 2^{X^*}$ maximal monoton ist. Da auch $\bar{B}$ nur eine Verschiebung von B ist sieht man sofort, dass $\bar{B}\colon C - u_0 \to X^*$ demistetig und beschränkt ist. Um die Pseudomonotonie von $\bar{B}$ zu zeigen, wählen wir eine Folge $(u_n) \subset C - u_0$ mit $u_n \rightharpoonup u$, $(n \to \infty)$ und

$$0 \ge \limsup_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - u\rangle = \limsup_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - (u + u_0)\rangle\,.$$

Aufgrund der Pseudomonotonie von B erhalten wir für alle $w \in X$

$$\langle B(u + u_0) - u_0^*, u + u_0 - w\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle B(u_n + u_0) - u_0^*, u_n + u_0 - w\rangle\,,$$

was mit der Bezeichnung $\tilde{w} = w - u_0$

$$\langle \bar{B}u, u - \tilde{w}\rangle \le \liminf_{n\to\infty} \langle \bar{B}u_n, u_n - \tilde{w}\rangle\,,$$

impliziert. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b folgt mit $v = u - u_0 \in C - u_0$, mit $\|v\| > r - \|u_0\|$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{B}v, v\rangle &= \langle B(v + u_0) - u_0^*, v\rangle = \langle Bu - u_0^*, u - u_0\rangle \\ &> \langle b - u_0^*, u - u_0\rangle = \langle b - u_0^*, v\rangle\,,\end{aligned}$$

d.h. $\bar{B}$ ist koerziv bezüglich $\bar{A}$ und $b - u_0^*$. Also erfüllt auch $\bar{B}$ die Voraussetzungen des Satzes.

1. Äquivalente Variationsungleichung: Wir suchen ein $u \in C$ mit:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in A\,. \tag{3.18}$$

Dieses Problem ist äquivalent zu unserem ursprünglichen Problem (3.16). Wenn nämlich $u \in C$ die Ungleichung (3.18) löst, dann folgt aus der maximalen Monotonie von A, dass $(u, b - Bu) \in A$, d.h. insbesondere $b \in Au + Bu$ und $u \in D(A)$. Falls umgekehrt u eine Lösung von (3.16) ist, dann ist $b - Bu \in Au$ und die Ungleichung gilt aufgrund der Monotonie von A.

2. Apriori Schranke: Sei $u \in C$ eine Lösung (3.18). Da $(0, 0) \in A$ gilt

$$\langle b - Bu, u\rangle \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \langle Bu - b, u\rangle \le 0\,.$$

Andererseits ist B koerziv bezüglich A und b mit $u_0 = 0$. Daher gibt es ein $r > 0$ mit $\langle Bu - b, u\rangle > 0$ für alle $\|u\| > r$. Diese und die obige Ungleichung liefern

$$\|u\| \leq r\,, \tag{3.19}$$

falls $u \in C$ eine Lösung von (3.18) ist.

3. Galerkin–Ungleichung: Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}$ die Menge aller endlich-dimensionalen linearen Unterräume Y von X. Wir wählen ein festes $Y \in \mathcal{L}$. Anstelle von (3.18) betrachten wir das approximative Problem: Wir suchen $u_Y \in C \cap Y$, das die Ungleichung

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle_Y \geq 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y \tag{3.20}$$

löst. Man beachte in diesem Zusammenhang, dass aus $Y \subseteq X$ die Relation $X^* \subseteq Y^*$ folgt. Dies ist so zu verstehen, dass für $v^* \in X^*$ die Einschränkung auf $Y \subseteq X$ sofort ein Element aus Y^* liefert, d.h. die Dualitätsprodukte auf beiden Räumen werden miteinander identifiziert, und es gilt für alle $v \in Y$:

$$\langle v^*, v\rangle_Y := \langle v^*, v\rangle_X\,.$$

4. Lösung von (3.20): Wir müssen eine weitere Approximation des Problems (3.20) durchführen. Dazu setzen wir für $R > 0$

$$\begin{aligned} K_R &:= \{v \in C \cap Y \,\big|\, \|v\|_X \leq R\}\,,\\ G_R &:= \{(v, v^*) \in A \,\big|\, v \in K_R\}\,. \end{aligned}$$

Man beachte, dass beide Mengen nichtleer sind, da $(0, 0) \in A$. Wir approximieren (3.20) durch das *abgeschnittene Problem*: Suche $u_R \in K_R$:

$$\langle b - Bu_R - v^*, u_R - v\rangle_Y \geq 0 \qquad\qquad \forall (v, v^*) \in G_R\,. \tag{3.21}$$

(a) Lösung des abgeschnittenen Problems: Auf das Problem (3.21) wollen wir Lemma 1.2.27 anwenden. Dazu setzen wir:
   (α) $K = K_R$. Die Menge $K \subset Y$ ist konvex und kompakt, da sie eine abgeschlossene Teilmenge von Y ist und $\dim Y < \infty$ gilt.
   (β) $M = G_R$. Menge M ist monoton, da der Operator A insbesondere monoton ist.
   (γ) $T\colon K \to X^*\colon\; u \mapsto b - Bu$. Der Operator T ist stetig, da B demistetig ist, d.h. aus $u_n \to u\,(n \to \infty)$, folgt $Bu_n \rightharpoonup Bu, (n \to \infty)$. Wir betrachten aber B eingeschränkt auf Y, d.h. $B\colon C \cap Y \to X^* \subseteq Y^*$ mit $\dim Y^* < \infty$. In endlich–dimensionalen Räumen impliziert schwache Konvergenz aber starke Konvergenz. Also erhalten wir $Bu_n \to Bu$, $(n \to \infty)$, d.h. T ist stetig.

   Nach Lemma 1.2.27 hat das abgeschnittene Problem (3.21) demnach eine Lösung $u_R \in K_R$.

(b) Lösung der Galerkin–Ungleichung (3.20): Wir setzen

$$\mathcal{S}_R := \{u_R \in K_R \,\big|\, u_R \text{ ist eine Lösung von (3.21)}\},$$

d.h. $\mathcal{S}_R \subseteq K_R$ für alle $R > 0$. Aus der Koerzivität von B bezüglich A und b (cf. Schritt 2.) folgt:

$$\|u_R\| \le r, \tag{3.22}$$

wobei r unabhängig von R und $Y \in \mathcal{L}$ ist. Die Menge $\mathcal{S}_R$ hat folgende Eigenschaften:

(α) $\mathcal{S}_R$ ist abgeschlossen. Sei $(u_n) \subset \mathcal{S}_R$, mit $u_n \to u$, $(n \to \infty)$. Da B demistetig ist folgt also $Bu_n \rightharpoonup Bu$, $(n \to \infty)$. Somit bleibt die Ungleichung (3.21) beim Grenzübergang $n \to \infty$ erhalten, d.h. $u \in \mathcal{S}_R$.

(β) $\mathcal{S}_R$ ist kompakt, da sie eine abgeschlossene Teilmenge von $K_R = \{u \in C \cap Y \,\big|\, \|u\| \le R\}$ ist und K_R, als abgschlossene und beschränkte Teilmenge des endlich–dimensionalen Raumes Y, selbst kompakt ist.

(γ) $\mathcal{S}_{R'} \subseteq \mathcal{S}_R$ für alle R', R mit $R' \ge R \ge r$, da für $R' \ge R \ge r$ gilt: $G_R \subseteq G_{R'}$.

Für eine Folge $R_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ bilden also die Mengen $\mathcal{S}_{R_n}$ eine absteigende Folge kompakter Mengen und somit (cf. endliches Durchschnittsprinzip (3.24)) folgt die Existenz eines Elements u_Y mit

$$u_Y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{R_n} \,.$$

Aus (3.22) und der Definition von $K_R \subseteq C$ erhalten wir sofort

$$\|u_Y\| \le r \qquad \text{und} \qquad u_Y \in C \,. \tag{3.23}$$

Außerdem ist u_Y eine Lösung von (3.20), denn für $(v, v^*) \in A, v \in C \cap Y$ gilt: Es existiert ein R_{n_0}, so dass $\|v\| \le R_{n_0}$. Damit ist u_Y eine Lösung von (3.21) für R_{n_0}. Da aber u_Y für alle R_n $(n \to \infty)$ in $\mathcal{S}_{R_n}$ liegt und v beliebig gewählt war, erhalten wir

$$\langle b - Bu_Y - v^*, u_Y - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in C \cap Y.$$

5. Konvergenz der Galerkin–Lösungen u_Y: Wir wollen zeigen, dass “$u_Y \to u$“ in einem gewissem Sinne, wobei u eine Lösung von (3.18) ist. Hierbei tritt das Problem auf, dass Pseudomonotonie nur über (abzählbare) Folgen definiert ist. Das System $\mathcal{L}$ ist aber überabzählbar. Also ist eine weitere Approximation nötig:

(a) Endliches Durchschnittsprinzip: Seien $Y, Z \in \mathcal{L}$. Wir setzen

$$M_Z := \{(u_Y, Bu_Y) \in C \times X^* \,\big|\, u_Y \text{ Lösung von (3.20) mit } Y \supseteq Z\} \,.$$

Wir wollen zeigen, dass es ein Element

$$(u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}^w_Z$$

gibt, wobei $\overline{M}_Z^w$ der Abschluß von M_Z in $X \times X^*$ bezüglich der schwachen Topologie sei. Dieses u wird die gesuchte Lösung sein. Wir beweisen nun die Existenz eines solchen Paare (u, u^*).

Aus der apriori Abschätzung (3.23) erhalten wir, dass für alle $Y \in \mathcal{L}$ gilt: $\|u_Y\| \leq r$. Da $B\colon X \to X^*$ beschränkt ist, ist die Menge $B(B_r)$ auch beschränkt. Also gibt es einen abgeschlossenen Ball $K \subseteq X \times X^*$ so, dass

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} M_Z \subseteq K\,.$$

Da X reflexiv ist, sind es auch X^* und $X \times X^*$. Da K stark abgeschlossen und konvex ist, ist K auch schwach abgeschlossen (cf. [**?**, Satz 5.10, S. 166]). Daher folgt insgesamt, dass K schwach kompakt ist. Nun ist aber für alle $Z \in \mathcal{L}$ die Menge $\overline{M}_Z^w$ schwach abgeschlossen und es gilt: $\overline{M}_Z^w \subseteq K$. Demzufolge ist $\overline{M}_Z^w$ schwach kompakt, und

$$\bigcup_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w \subseteq K\,.$$

Seien nun $Y, Z \in \mathcal{L}$ beliebig aber fest. Wir setzen $S = \operatorname{span}\{Y, Z\}$ und erhalten $M_Y \cap M_Z \supseteq M_S$. In der Tat, sei $(u_S, Bu_S) \in M_S$. Dann ist u_S eine Lösung von (3.20) in einem Raum $U \supseteq S = \operatorname{span}\{Y, Z\} \supseteq Y$ und $U \supseteq S \supseteq Z$. Das bedeutet aber $(u_S, Bu_S) \in M_Z \cap M_Y$. Wiederholen wir dieses Argument endlich oft, erhalten wir

$$\bigcap_{i=1}^{N} \overline{M}_{Y_i}^w \neq \emptyset \qquad\qquad \forall N\,,\ \forall Y_i \in \mathcal{L}\,.$$

Aus dem endlichen Durchschnittsprinzip folgt somit

$$\exists (u, u^*) \in \bigcap_{Z \in \mathcal{L}} \overline{M}_Z^w\,. \tag{3.24}$$

Das *endliche Durchschnittsprinzip* besagt: Eine Menge K ist kompakt genau dann, wenn jedes *zentrierte* System von in K abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt besitzt. Ein System $A_i, i \in I$, heißt *zentriert*, wenn der Durchschnitt beliebiger endlicher Teilsysteme $A_{i_k}, k = 1, \ldots, N$, nichtleer ist.

(b) Konstruktion eines speziellen Paares (v_0, v_0^*): Es existiert $(v_0, v_0^*) \in A$ so, dass gilt:

$$\langle b - u^* - v_0^*, u - v_0 \rangle \leq 0\,. \tag{3.25}$$

Sei dem nicht so, dann gilt für alle $(v, v^*) \in A$:

$$\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle > 0\,.$$

Da A maximal monoton ist, folgt $b - u^* \in Au$. Wir können nun speziell $v = u$ und $v^* = b - u^*$ wählen und erhalten $\langle b - u^* - v^*, u - v \rangle = 0$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also gilt (3.25).

(c) Spezielle Approximation:

3.26 Lemma. *Sei X ein reeller, reflexiver Banachraum und $M \subseteq X$ sei beschränkt. Dann gibt es für alle $u \in \overline{M}^w$ eine Folge $(u_n) \subseteq M$ mit*

$$u_n \rightharpoonup u \qquad (n \to \infty)\,.$$

Beweis. Der Beweis benutzt einige Tatsachen aus der Theorie topologischer Räume, die den Rahmen dieses Buches sprengen würden. Eine Anleitung zum Beweis findet sich in [**?**, S. 911]. ■

Wir wählen nun $Y \in \mathcal{L}$ fest: Die Menge $\overline{M_Y}^w$ ist schwach abgeschlossen in $X \times X^*$, und $(u, u^*) \in \overline{M_Y}^w$ wegen (3.24). Nach obigem Lemma gibt es eine Folge $(u_n, u_n^*) \subset M_Y$ mit $(u_n, u_n^*) \rightharpoonup (u, u^*)$ in $X \times X^*$ $(n \to \infty)$. Nach Konstruktion von M_Y ist $u_n^* = Bu_n$ und insbesondere $u_n \in C$. Die Menge C ist abgeschlossen und konvex, also schwach abgeschlossen, daher ist auch $u \in C$. Demnach gibt es eine Folge $(u_n) \subset C$ so, dass

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u && \text{in } X \\ Bu_n &\rightharpoonup u^* && \text{in } X^* \end{aligned} \qquad (n \to \infty)\,, \tag{3.27}$$

und

$$\langle b - Bu_n - v^*\,,\ u_n - v\rangle \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,, \tag{3.28}$$

denn $u_n \in M_Y$, und Elemente von M_Y sind Lösungen von (3.20).

(d) Pseudomonotonie von B: Wir wollen zeigen, dass gilt:

$$\langle Bu, u - v\rangle \le \langle v^* - b, v - u\rangle \qquad \forall\,(v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,,$$

denn damit haben wir gezeigt, dass (3.18) und damit auch (3.16) für alle $v \in Y \cap C$ gilt. Wir beschränken uns dazu auf solche $Y \in \mathcal{L}$ mit $v_0 \in Y$, wobei v_0 das Element aus 5. (b) ist. Wir wählen ein festes, aber beliebiges Y mit dieser Eigenschaft. Aus (3.28) folgt für alle $w \in C$, $(v, v^*) \in A, v \in Y \cap C$, und alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle Bu_n, u_n - w\rangle \le \langle b - v^*, u_n - v\rangle + \langle Bu_n, v - w\rangle\,. \tag{3.29}$$

Wir wählen insbesondere $w = v$. Dies ist möglich ist, da $D(A) \subseteq C$. Somit folgt aus (3.29)

$$\langle Bu_n, u_n - v\rangle \le \langle v^* - b, v - u_n\rangle \qquad \forall\,(v, v^*) \in A \text{ mit } v \in Y \cap C\,. \tag{3.30}$$

Nun wählen wir $w = u\,,\ v = v_0$ und $v^* = v_0^*$, wobei (v_0, v_0^*) das spezielle Paar aus 5. (b) ist, und erhalten aus (3.29)

$$\langle Bu_n, u_n - u\rangle \le \langle v_0^* - b, v_0 - u_n\rangle + \langle Bu_n, v_0 - u\rangle$$

und somit mit Hilfe von (3.27) und (3.25)

$$\limsup_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le \langle v_0^* - b + u^*, v_0 - u\rangle \le 0\,,$$

d.h. $\limsup\limits_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - u\rangle \le 0$. Da der Operator B pseudomonoton ist und $u_n \rightharpoonup u\,(n\to\infty)$, folgt mit Hilfe von (3.30) für alle $(v,v^*) \in A$, $v \in Y \cap C$

$$\begin{aligned}\langle Bu, u - v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \\ &\le \langle v^* - b, v - u\rangle\,,\end{aligned}$$

d.h. für alle $(v,v^*) \in A$, und $v \in Y \cap C$ gilt:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0\,.$$

Zu beliebigem $(v,v^*) \in A$ gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $v \in Y$, denn $\bigcup\limits_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$.

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v,v^*) \in A\,,$$

d.h. $u \in C$ ist eine Lösung von (3.18).

Der Beweis des Satzes ist vollständig. ■

• Die Voraussetzung von Satz 3.17 ist für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls B **koerziv bezüglich** A ist, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$ so, dass

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty\\ u\in C}} \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} = \infty\,. \tag{3.31}$$

Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung von (3.18), d.h. $R(A+B) = X^*$. In der Tat haben wir für $\|u\| > r$

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu - b, u - u_0\rangle}{\|u\|} &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\|\,\|u - u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \|b\|\frac{\|u\| + \|u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - 2\|b\|\,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\| \to \infty$. Somit gilt $\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle$ für alle $\|u\| > r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes 3.17 sind für alle $b \in X^*$ erfüllt.

Wir wollen nun Satz 3.17 auf Evolutionsprobleme anwenden.