Beweis. Wir wollen den Satz von Brezis (Satz 2.9) anwenden. Der Raum $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ ist ein reflexiver, separabler Banachraum. Aus den Lemmata 1.27 und 1.29 wissen wir, dass $A_1 : X \to X^*$ ein strikt monotoner und stetiger, also auch beschränkter, Operator ist. Also ist A_1 nach Lemma 2.5 (i) pseudomonoton. Nach Lemma 2.13 ist A_2 ein stark stetiger, also auch beschränkter, Operator. Lemma 2.5 (ii) besagt, dass somit A_2 pseudomonoton ist. Insgesamt ist also $A = A_1 + A_2$ ein beschränkter pseudomonotoner Operator, der nach Lemma 2.17 auch koerziv ist. Lemma 1.27 liefert, dass $b \in X^*$ gilt. Die Behauptung folgt nun sofort aus Satz 2.9. ■

3.2.3 Die stationären Navier–Stokes–Gleichungen

Die stationären Navier–Stokes Gleichungen lauten[2]

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \qquad && \text{auf } \Omega\,, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Omega\,, \\ \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigem Rand $\partial\Omega$ ist. Diese Gleichungen beschreiben die Strömung einer viskosen, inkompressiblen Flüssigkeit. Es ist $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Geschwindigkeit, $p : \Omega \to \mathbb{R}$ der Druck und $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine äussere Kraft. Wir setzen

$$X := \{\mathbf{u} \in \big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \mid \operatorname{div} \mathbf{u} = 0\}\,. \tag{2.21}$$

Dies ist offensichtlich ein linearer Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$, den wir mit der Norm

$$\|\mathbf{u}\|_X := \|\nabla \mathbf{u}\|_{(L^2(\Omega))^{3\times 3}} \tag{2.22}$$

versehen. Wir definieren für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$

$$\begin{aligned} \langle A_1 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \\ \langle A_2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,, \\ \langle P, \boldsymbol{\varphi}\rangle &= \int_\Omega \nabla p \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx := -\int p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\, dx = 0\,, \\ \langle b, \boldsymbol{\varphi}\rangle &:= \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi}\, dx\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

---

[2] Wir benutzen die Notation $[\nabla \mathbf{u}]u = \big(\sum_{j=1}^3 (\partial_j u_i)\, u_j\big)_{i=1,2,3}$

Offensichtlich ist die Operatorgleichung $A_1 + A_2 = b$ in X^* äquivalent zur schwachen Formulierung von Problem (2.20), d.h. für alle $\boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \,. \tag{2.24}$$

Wir überprüfen nun, dass $A_1, A_2 \colon X \to X^*$, $b \in X^*$ gilt, und dass der Operator $A = A_1 + A_2$ die Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt.

2.25 Lemma. *Der Raum X mit der Norm (2.22) ist ein reflexiver, separabler Banachraum.*

Beweis. Der Raum X, definiert in (2.21) ist ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$. Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ $(n \to \infty)$. Daraus folgt insbesondere, dass $\nabla \mathbf{u}_n \to \nabla \mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$ $(n \to \infty)$. Daher gibt es eine Teilfolge mit $\nabla \mathbf{u}_{n_k} \to \nabla \mathbf{u}$ fast überall $(k \to \infty)$. Wir arhalten also für fast alle $x \in \Omega$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x) = \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u}(x) = \lim_{n \to \infty} \operatorname{tr} \nabla \mathbf{u}_n(x) = 0\,,$$

d.h. $\mathbf{u} \in X$. Die Abgeschlossenheit von X stellt sicher, dass X ein separabler Banachraum ist. Außerdem ist ein abgeschlossener Teilraum eines reflexiven Raumes wieder reflexiv. ∎

2.26 Lemma. *Unter dem obigen Voraussetzungen an Ω und mit X, definiert in (2.21), ist der Operator $A_1 : X \to X^*$ linear, stetig, koerziv, strikt monoton und beschränkt.*

Beweis. Der Operator $A_1 : X \to X^*$ ist eine vektorwertige Variante des Operators $A : W_0^{1,2}(\Omega) \to (W_0^{1,2}(\Omega))^*$ in Lemma 1.27 mit $p = 2$ und $s = 0$. Da X ein abgeschlossener Teilraum von $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ ist folgt sofort

$$A_1 \colon X \subseteq \big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3 \to \big((W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3 \subseteq X^*\,,$$

da die Restriktion auf X eines Funktionals definiert auf $\big(W_0^{1,2,}(\Omega)\big)^3$ auch ein Funktional auf X ist. Die Behauptung folgt also sofort aus Lemma 1.27 und Lemma 1.29. ∎

2.27 Lemma. *Der Operator A_2 definiert in (2.23) ist ein stark stetiger, beschränkter Operator von X nach X^*.*

Beweis. 1. Für alle $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi} \in X$ gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2 \mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| &\le \int_\Omega |\mathbf{u}||\nabla \mathbf{u}||\boldsymbol{\varphi}| \, dx \\
&\le \Big(\int_\Omega |\mathbf{u}|^4 \, dx\Big)^{\frac14} \Big(\int_\Omega |\boldsymbol{\varphi}|^4 \, dx\Big)^{\frac14} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2} \\
&\le c\, \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2}^2 \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \,,
\end{aligned}$$

denn $X \hookrightarrow L^4(\Omega)$ wegen $\frac{1}{4} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$. Aus der Abschätzung folgt $A_2\mathbf{u} \in X^*$ und damit $A_2 \colon X \to X^*$, als auch die Beschränktheit von A_2.

2. A_2 ist stark stetig: Sei $(\mathbf{u}_n) \subseteq X$ eine Folge mit $\mathbf{u}_n \rightharpoonup \mathbf{u}$ $(n \to \infty)$. Aus der kompakten Einbettung $X \hookrightarrow\hookrightarrow L^4(\Omega)$, erhalten wir für eine Teilfolge $\mathbf{u}_{n_k} \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Da die weitere Argumentation wieder für alle konvergenten Teilfolgen gilt, bezeichnen wir die obige Teilfolge wiederum mit $(\mathbf{u}_n)$. Wir werden zeigen, dass gilt:

$$\|A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}\|_{X^*} = \sup_{\substack{\boldsymbol{\varphi} \in X \\ \|\boldsymbol{\varphi}\|_X \leq 1}} |\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}\rangle| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nehmen wir an, dies gelte nicht. Also existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ und Elemente $\boldsymbol{\varphi}_n \in X$, $\|\boldsymbol{\varphi}_n\|_X \leq 1$ so, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| \geq \varepsilon_0 \,.$$

Da die Folge $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge $(\boldsymbol{\varphi}_{n_k})$ mit $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \rightharpoonup \boldsymbol{\varphi}$ in X $(k \to \infty)$, und $\boldsymbol{\varphi}_{n_k} \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$ $(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge, im Folgenden mit $(\boldsymbol{\varphi}_n)$ bezeichnet, gilt:

$$\begin{aligned}
|\langle A_2\mathbf{u}_n - A_2\mathbf{u}, \boldsymbol{\varphi}_n\rangle| &= \Big| \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n]\mathbf{u}_n \cdot \boldsymbol{\varphi}_n - [\nabla\mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi}_n \, dx \Big| \\
&= \Big| \int_\Omega [\nabla\mathbf{u}_n](\mathbf{u}_n - \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\varphi}_n + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}) \\
&\qquad + [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \\
&\leq \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2} \|\boldsymbol{\varphi}_n\|_{L^4} \\
&\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^4} \|\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})\|_{L^2} \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\quad + \Big| \int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \\
&\leq C_1 \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^4} + C_2 \|\boldsymbol{\varphi}_n - \boldsymbol{\varphi}\|_{L^4} \\
&\quad + \Big| \int_\Omega [\nabla(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx \Big| \to 0 \qquad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

da $\|\nabla\mathbf{u}_n\|_{L^2}$ beschränkt ist, $\mathbf{u}_n \to \mathbf{u}$ in $L^4(\Omega)$, $\nabla\mathbf{u}_n \rightharpoonup \nabla\mathbf{u}$ in $L^2(\Omega)$ und $\boldsymbol{\varphi}_n \to \boldsymbol{\varphi}$ in $L^4(\Omega)$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme. Damit folgt $A_2\mathbf{u}_n \to A_2\mathbf{u}$, d.h. A_2 ist stark stetig auf X. ■

2.28 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz–stetigen Rand $\partial\Omega$. Dann gibt es zu einem beliebigen $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$ ein $\mathbf{u} \in X$, wobei X in (2.21) definiert ist, so, dass $\mathbf{u}$ (2.20) im schwachen Sinne löst, d.h. (2.24) gilt.*

Beweis. Aufgrund der Lemmata 2.26, 2.27 und 2.5 ist der Operator $A = A_1 + A_2 \colon X \to X^*$ beschränkt und pseudomonoton. Es bleibt zu zeigen, dass A auch koerziv ist. Für alle $\mathbf{u} \in X$ haben wir:

$$\begin{aligned}\langle A_2\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle &= \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i u_j \, dx = \int\limits_\Omega \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{|\mathbf{u}|^2}{2}\right) dx \\ &= -\int\limits_\Omega \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \operatorname{div} \mathbf{u} \, dx = 0\,,\end{aligned}$$

da für $\mathbf{u} \in X$ gilt $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Da A_1 koerziv ist, ist also insgesamt A koerziv auf X [3]. Offensichtlich ist $b \in (W_0^{1,2}(\Omega)^3)^* \subseteq X^*$, sofern $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^3$, mit denselben Argumenten wie in Lemma 1.27. Satz 2.9 liefert die Behauptung des Satzes. ■

Bisher haben wir die Existenz einer Geschwindigkeit $\mathbf{u}$ gezeigt, die (2.24) erfüllt. Um auch einen Druck p zu finden so, dass für alle $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ gilt:

$$\int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int\limits_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int\limits_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx = \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx\,, \tag{2.29}$$

muss man den *Satz von De Rham* auf $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ definiert durch

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle := \int\limits_\Omega \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi} \, dx + \int\limits_\Omega [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int\limits_\Omega \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx$$

anwenden.

2.30 Satz (De Rham, 1960). *Sei* $\mathbf{F} \in \big((W_0^{1,2}(\Omega))^3\big)^*$ *ein Funktional, für das für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in X$ *gilt:*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = 0\,.$$

Dann existiert ein $p \in L^2(\Omega)$ *mit* $\int_\Omega p \, dx = 0$ *so, dass für alle* $\boldsymbol{\varphi} \in (W_0^{1,2}(\Omega))^3$ *gilt:*

$$\langle \mathbf{F}, \boldsymbol{\varphi}\rangle = \int\limits_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \, dx\,.$$

[3] Die Koerzivität ist die einzige Eigenschaft, die nur auf X und nicht auf $\big(W_0^{1,2}(\Omega)\big)^3$ gilt. Zum Beweis der anderen Eigenschaften benötigen wir nicht, dass $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$.

für alle $r < p\frac{n+2}{n}$. Aufgrund von Satz 3.42 mit $B_0 = W_0^{1,p}(\Omega), B = L^s(\Omega)$, $s < \frac{np}{n-p}$, $B_1 = (W_0^{1,p}(\Omega))^*, p_0 = p, p_1 = p'$ haben wir

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(I; L^s(\Omega)). \tag{3.68}$$

Sei nun $(u_n) \subseteq W$ eine beschränkte, schwach konvergente Folge. Aufgrund von (3.68) gibt es eine Teilfolge (u_{n_k}) mit

$$u_{n_k} \to u \quad \text{in } L^p(I; L^s(\Omega)) \quad (k \to \infty). \tag{3.69}$$

Aus (3.67), (3.59) und (3.69) folgt also

$$\begin{aligned}\int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^r}^r \, dt &\le c \, \|u_{n_k} - u\|_W^{r-p} \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p \, dt \\ &\le c \int_I \|u_{n_k}(t) - u(t)\|_{L^s}^p \, dt \ \to 0 \quad (k \to \infty),\end{aligned}$$

d.h. $u_{n_k} \to u$ in $L^r(I \times \Omega)$ $(k \to \infty)$, falls $r < p\frac{n+2}{n}$. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen, um den Operator A_2 zu betrachten (cf. Lemma 2.13).

3.70 Lemma. *Sei $1 < p < \infty, X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ und genüge die stetige Funktion g der Bedingung (2.14), d.h. g besitzt $(r-1)$–Wachstum. Dann bildet der Operator A_2 den Raum*

$$W = \{u \in X \,|\, \frac{du}{dt} \in X^*\}$$

in seinen Dualraum ab und ist beschränkt, falls $r \le p\frac{n+2}{n}$. Für $r < p\frac{n+2}{n}$ ist A_2 stark stetig.

Beweis. 1. Aufgrund der Wachstumsbedingung (2.14) haben wir für alle $u, v \in W$ und $q = p\,\frac{n+2}{n}$

$$\begin{aligned}|\langle A_2 u, v\rangle| &\le c \int_I \int_\Omega (1 + |u|)^{r-1} |v| \, dx \, dt \\ &\le c \, (1 + \|u\|_{L^{(r-1)q'}(I \times \Omega)}^{r-1}) \|v\|_{L^q(I \times \Omega)}.\end{aligned}$$

Sofern $(r-1)q' \le q$ gilt, erhalten wir also aufgrund von (3.64)

$$|\langle A_2 u, v\rangle| \le c \, (1 + \|u\|_W^{r-1}) \, \|v\|_W. \tag{3.71}$$

Die Forderung $(r-1)q' \le q$ ist äquivalent zu $r \le q = p\frac{n+2}{n}$. Somit folgt aus (3.71) und der Definition der dualen Norm in W^*, dass $A_2 : W \to W^*$ und dass A_2 beschränkt ist.

2. Sei $(u_n) \subseteq W$ eine schwach konvergente Folge. Aufgrund von Folgerung 3.65 gibt es eine Teilfolge mit

$$u_{n_k} \to u \qquad \text{in } L^r(I \times \Omega) \qquad (k \to \infty)\,,$$

wobei $r < p\frac{n+2}{n}$. Wir setzen (cf. Lemma 2.13, Teil 2.)

$$F(u) = g(u)$$

und erhalten aus Lemma 1.19, dass der Nemyckii–Operator

$$F : L^r(I \times \Omega) \to L^{r'}(I \times \Omega)$$

stetig ist, d.h.

$$\|F(u_{n_k}) - F(u)\|_{L^{r'}(I\times\Omega)} \to 0 \qquad (k \to \infty)\,.$$

Daraus und aus der Definition der Norm in W^* erhalten wir sofort, dass (cf. Lemma 2.13, Teil 2.)

$$A_2 u_{n_k} \to A_2 u \;\text{ in } W^* \qquad (k \to \infty)\,.$$

Das Konvergenzprinzip Lemma 0.3 liefert, dass $A_2 : W \to W^*$ stark stetig ist. ∎

In Lemma 3.36 wurde gezeigt, dass der Operator A_1 den Raum X in seinen Dualraum X^* abbildet. Da $W \subseteq X$ ist, erhalten wir sofort, dass

$$A_1 : W \to W^*$$

und dass $A_1 : W \to W^*$ ein stetiger, strikt monotoner, koerziver und beschränkter Operator ist.

3.72 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Lemma 3.70 erfülle g die Koerzivitätsbedingung (2.18). Dann ist der Operator $A = A_1 + A_2 \colon W \to W^*$ koerziv.*

Beweis. Der Beweis läuft genau wie der Beweis von Lemma 2.17, wenn man $L^p(\Omega)$ durch $L^p(I \times \Omega)$ ersetzt. ∎

3.73 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und sei $I = [0,T]$ ein endliches Zeitintervall. Sei ferner $\frac{2n}{n+2} \le p < n$ und erfülle die stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Bedingungen (2.14) und (2.18) mit $1 \le r < p\frac{n+2}{n}$. Dann gibt es für alle $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$ eine Lösung $u \in D(L) = \{u \in W \,\big|\, u(0) = 0\}$ des Problems (3.35), d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(I \times \Omega)$ gilt:*

$$\int\limits_I \Big\langle \frac{du(t)}{dt}, \varphi(t) \Big\rangle_{W_0^{1,p}} dt + \int\limits_I \int\limits_\Omega |\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) \cdot \nabla \varphi(t)\, dx\, dt$$
$$+ \int\limits_I \int\limits_\Omega g(u(t))\varphi(t)\, dx\, dt = \int\limits_I \int\limits_\Omega f(t)\varphi(t)\, dx\, dt\,.$$

Beweis. Offensichtlich ist $\left(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\right)$ ein Gelfand–Tripel, da $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ für $p \geq \frac{2n}{n+2}$. Der Operator $A\colon W \to W^*$ ist koerziv nach Lemma 3.72 und pseudomonoton, demistetig und beschränkt aufgrund von Lemma 2.5 und Lemma 3.37, sowie Lemma 3.70 (cf. Beweis von Satz 2.19). Da $L : D(L) \subseteq W \to W^* : u \mapsto \frac{du}{dt}$ ein maximal monotoner Operator ist, folgt die Behauptung sofort aus Satz 3.34. ■

4 Der Abbildungsgrad

Der Abbildungsgrad ist nützlich, um die Lösbarkeit von Gleichungen der Art

$$f(x) = y$$

mit Hilfe topologischer Überlegungen zu zeigen. Grob gesagt gibt der Abbildungsgrad die Anzahl der Lösungen an. Der Abbildungsgrad kann definiert werden für Funktionen

a) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mithilfe dieses Begriffes des Abbildungsgrades können wir den Satz von Brouwer (cf. Satz 1.2.17) einfach beweisen.

b) $f\colon X \to X$, wobei X ein Banachraum ist. In diesem Fall finden wir einen einfachen Beweis für den Satz von Schauder (cf. Satz 1.2.44).

4.1 Der Abbildungsgrad von Brouwer

Im Folgenden sei immer $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \emptyset$, ein beschränktes, offenes Gebiet. Ziel dieses Abschnitts ist es, folgenden Satz zu beweisen:

1.1 Satz (Brouwer 1912, Nagumo 1951). *Sei $f\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion, und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$. Dann existiert eine ganze Zahl $d(f,\Omega,p)$, der **Abbildungsgrad**, mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *Falls $d(f,\Omega,p) \neq 0$, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$, so dass*

$$f(x_0) = p\,.$$

(*Existenz von Lösungen*)

(ii) *Falls $f(x,t)\colon \bar{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung ist und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq f(x,t)$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0,1]$, dann gilt:*

$$d(f(.,0),\Omega,p) = d(f(.,1),\Omega,p)\,.$$

(*Invarianz unter Homotopien*)

(iii) *Sei $\Omega = \bigcup\limits_i \Omega_i$, Ω_i offen, disjunkt, beschränkt, $\partial\Omega_i \subseteq \partial\Omega$. Dann gilt für alle $p \notin f(\partial\Omega)$:*

$$d(f,\Omega,p) = \sum_i d(f,\Omega_i,p)\,.$$

(*Zerlegungseigenschaft*)

Satz 1.1 verallgemeinert folgendes Konzept von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$. Sei Γ eine geschlossene C^1–Kurve und $a \in C\backslash\Gamma$. Die **Umlaufzahl** $n(\Gamma, a)$ von Γ bezüglich a ist definiert durch

$$n(\Gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dz}{z-a}\,.$$

Wir setzen

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{f(\Gamma)} \frac{dz}{z}\,.$$

Dabei sei f eine meromorphe Funktion mit $f \neq 0$ auf Γ und Γ eine nullhomologe C^1–Kurve. Dann ist

$$\deg(f, \Gamma, 0) = \sum_{z \in N} k(z) n(\Gamma, z),$$

wobei N die Menge der Nullstellen von f ist und $k(z) \in \mathbb{N}$ die Ordnung der Nullstelle $z \in N$ (Argument–Prinzip, siehe [**?**, S. 162]). Für $n = 2$ stimmen beide Konzepte überein.

4.1.1 Die Konstruktion des Abbildungsgrades von Brouwer

Sei $f\colon \overline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion mit $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Die Determinante der Jacobi-Matrix von f im Punkte $x \in \Omega$ bezeichnen wir mit $J(f(x))$, d.h.

$$J(f(x)) := \det(\nabla f(x))\,.$$

Ferner setzen wir für $p \in \mathbb{R}^n$

$$f^{-1}(p) := \{x \in \Omega \,\big|\, f(x) = p\}\,.$$

Der Punkt $x \in f^{-1}(p)$ heißt **regulär**, wenn $J(f(x)) \neq 0$.

1.2 Lemma. *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $p \in f(\overline{\Omega}) \setminus f(\partial\Omega)$, und sei jeder Punkt der Menge $f^{-1}(p)$ regulär. Dann ist $f^{-1}(p)$ endlich.*

Beweis. Sei $f^{-1}(p)$ nicht endlich. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \subset f^{-1}(p)$ mit $x_m \neq x_n$ für $m \neq n$. Da Ω beschränkt ist, ist auch die Folge (x_n) beschränkt. Daher gibt es ein $x_0 \in \overline{\Omega}$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \to x_0\,(k \to \infty)$. Für diese Teilfolge gilt

$$f(x_{n_k}) = p$$

und somit $f(x_0) = p$, da f stetig ist. Nach Voraussetzung haben wir also $x_0 \notin \partial\Omega$ und $x_0 \in f^{-1}(p)$. Da $f^{-1}(p)$ nur aus regulären besteht, erhalten wir $J(f(x_0)) \neq 0$, d.h. der Rang von $\nabla f(x_0)$ ist n. Demzufolge ist $\nabla f(x_0)$ ein Homöomorphismus. Nach dem Satz über die inverse Funktion (Satz 2.2.16) folgt, dass $f\,|_{U(x_0)}$ ebenfalls ein Homöomorphismus und insbesondere eineindeutig ist. Dies ist ein Widerspruch, denn einerseits ist $f(x_0) = p$ und andererseits existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $k \geq k_0$ gilt: $x_{n_k} \in U(x_0)$ und $f(x_{n_k}) = p$. ■