$$\begin{aligned}\langle Bu, u - v\rangle &\le \liminf_{n\to\infty} \langle Bu_n, u_n - v\rangle \\ &\le \langle b - v^*, u - v\rangle \,,\end{aligned}$$

d.h. für alle $(v, v^*) \in A$, und $v \in Y \cap C$ gilt:

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle \ge 0 \,.$$

Zu beliebigem $(v, v^*) \in A$ gibt es ein $Y \in \mathcal{L}$ mit $v \in Y$, denn $\bigcup\limits_{\substack{Y\in\mathcal{L}\\ v_0\in Y}} Y = X$.

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\langle b - Bu - v^*, u - v\rangle_X \ge 0 \qquad \forall (v, v^*) \in A \,,$$

d.h. $u \in C$ ist eine Lösung von (3.18).

Der Beweis des Satzes ist vollständig. ■

• Die Voraussetzung von Satz 3.17 ist für alle $b \in X^*$ erfüllt, falls B **koerziv bezüglich** A ist, d.h. es existiert ein Element $u_0 \in C \cap D(A)$ so, dass

$$\lim_{\substack{\|u\|\to\infty\\ u\in C}} \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} = \infty \,. \tag{3.31}$$

Dann gibt es für alle $b \in X^*$ eine Lösung von (3.18), d.h. $R(A + B) = X^*$. In der Tat haben wir für $\|u\| > r$

$$\begin{aligned}\frac{\langle Bu - b, u - u_0\rangle}{\|u\|} &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \frac{\|b\|\,\|u - u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - \|b\|\frac{\|u\| + \|u_0\|}{\|u\|} \\ &\ge \frac{\langle Bu, u - u_0\rangle}{\|u\|} - 2\|b\| \,.\end{aligned}$$

Die rechte Seite der Ungleichung konvergiert gegen ∞ für $\|u\| \to \infty$. Somit gilt $\langle Bu, u - u_0\rangle > \langle b, u - u_0\rangle$ für alle $\|u\| > r$ mit r groß genug, d.h. die Bedingungen des Satzes 3.17 sind für alle $b \in X^*$ erfüllt.

Wir wollen nun Satz 3.17 auf Evolutionsprobleme anwenden.

3.3.3 Evolutionsprobleme

Betrachte für alle $t \in I = [0, T]$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\frac{du(t)}{dt} + Au(t) &= b(t) \,, \\ u(0) &= 0 \,.\end{aligned} \tag{3.32}$$

Sei L definiert durch $Lu = \frac{du}{dt}$ mit

$$D(L) = \big\{u \in W \,\big|\, u(0) = 0\big\}\,,$$

wobei

$$W = \Big\{u \in L^p(I;V) \,\Big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;V^*)\Big\}\,,$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Mithilfe von L schreibt sich (3.32) als

$$Lu + Au = b\,, \qquad u \in D(L)\,. \tag{3.33}$$

3.34 Satz. *Sei (V,H,V^*) ein Gelfand–Tripel, und setze $X = L^p(I;V)$, $1 < p < \infty$, wobei $I = [0,T]$, mit $T < \infty$. Sei $A\colon X \to X^*$ pseudomonoton, koerziv, demistetig und beschränkt. Dann existiert für alle $b \in X^*$ eine Lösung $u \in D(L)$ von (3.32). Falls A strikt monoton ist, ist diese eindeutig bestimmt.*

Beweis. 1. Existenz einer Lösung: Nach Lemma 3.12 ist L maximal monoton auf $D(L)$. Weiterhin ist $D(L)$ konvex und abgeschlossen in der Norm von W. Mit $C = D(L)$, $u_0 = 0$, $A = L$ und $B = A$ sind die Voraussetzungen von Satz 3.17 und der Bemerkung danach erfüllt. Daher gibt es ein $u \in D(L)$, das (3.32) löst.

2. Eindeutigkeit der Lösung: Seien u_1, $u_2 \in D(L)$ Lösungen von (3.32). Dann gilt

$$\begin{aligned} Lu_1 + Au_1 &= b\,,\\ Lu_2 + Au_2 &= b\,. \end{aligned}$$

Subtrahieren wir beide Gleichungen voneinander, folgt mithilfe von Lemma 3.11

$$\begin{aligned} 0 &= \langle L(u_1 - u_2), u_1 - u_2\rangle + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|(u_1 - u_2)(T)\|_H^2 - \|(u_1 - u_2)(0)\|_H^2\Big) + \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\\ &\geq \langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle\,. \end{aligned}$$

Da A strikt monoton ist, folgt daraus $u_1 = u_2$. ■

3.3.4 Quasilineare parabolische Gleichungen

Zur Illustration der allgemeinen Theorie betrachten wir nun folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + g(u) &= f && \text{in } \Omega \times I,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times I,\\ u(0) &= 0 && \text{in } \Omega\,, \end{aligned} \tag{3.35}$$

wobei f eine gegebene rechte Seite ist und g die Bedingungen (2.14) und (2.18) erfüllt. Wir bezeichnen mit $I = [0,T]$ ein endliches Zeitintervall und setzen $V = W_0^{1,p}(\Omega), H = L^2(\Omega)$ und $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$. Analog zum Falle quasilinearer elliptischer Gleichungen setzen wir für alle $u, v \in X$:

$$\langle A_1 u, v\rangle_X := \int_I \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \, dt \,,$$

$$\langle A_2 u, v\rangle_X := \int_I \int_\Omega g(u) \, v \, dx \, dt \,.$$

Wie wir in Lemma 1.29 ($s = 0$) gezeigt haben, ist der Operator A_1 „im stationären Fall" stetig, monoton, beschränkt und koerziv. Weiterhin wissen wir aus Lemma 2.13, dass der Operator A_2 „im stationären Fall" beschränkt und stark stetig ist, falls $r < \frac{np}{n-p}$. In Lemma 2.17 wurde gezeigt, dass „im stationären Fall" der Operator $A = A_1 + A_2$ pseudomonoton, koerziv, stetig und beschränkt ist.

Im hier vorliegenden „instationären Fall" müssen wir einerseits zeigen, dass für den Operator $A = A_1 + A_2 \colon X \to X^*$ gilt, wobei $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$ und $X^* = (L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)))^* = L^{p'}(I; (W_0^{1,p}(\Omega))^*)$, mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, und andererseits überprüfen inwieweit sich die Eigenschaften der Operatoren „im stationären Fall" auf den „instationären Fall" übertragen lassen.

3.36 Lemma. *Sei* $1 < p < \infty$ *und* $X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega))$. *Dann bildet der Operator* A_1 *den Raum* X *in seinen Dualraum* X^* *ab.*

Beweis. Mithilfe der Hölder–Ungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle A_1 u, v\rangle_X &\le \int_I \int_\Omega |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \, dt \\ &\le \|\nabla u\|^{p-1}_{L^p(I\times\Omega)} \|\nabla v\|_{L^p(I\times\Omega)} \,.\end{aligned}$$

Damit folgt $A_1 \colon X \to X^*$. ∎

3.37 Lemma. *Für alle* $1 < p < \infty$ *ist der Operator* $A_1 \colon X \to X^*$ *strikt monoton, stetig, koerziv und beschränkt.*

Beweis. Dies folgt völlig analog zum Beweis von Lemma 1.29 mit $s = 0$, allerdings muß beim Beweis der Stetigkeit und der Koerzivität anstatt mit den Räumen $L^p(\Omega)$ bzw. $L^{p'}(\Omega)$ mit den Räumen $L^p(I \times \Omega)$ bzw. $L^{p'}(I \times \Omega)$ gearbeitet werden. ∎

Im Beweis von Lemma 2.13 wurde für den Beweis der starken Stetigkeit von A_2 im „stationären Fall" die kompakte Einbettung $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^r(\Omega)$, für $r < \frac{np}{n-p}$, benutzt. Im allgemeinen gilt allerdings nicht, dass die Einbettung

$$X = L^p(I; W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(I; L^r(\Omega)) \,,$$

mit $r < \frac{np}{n-p}$ kompakt ist. Dies sieht man sofort, wenn man eine Folge $f_n \colon I \to \mathbb{R}$ betrachtet, die schwach in $L^p(I)$ gegen ein $f \in L^p(I)$ konvergiert, für die aber nicht gilt: $f_n \to f$ stark in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$. Sei nun $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ fest gewählt, dann kann die Folge

$$u_n(t,x) = f_n(t)v(x) \quad \in L^p(I;W_0^{1,p}(\Omega))$$

nicht stark in $L^p(I;L^r(\Omega))$ konvergieren. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^p_{L^p(I;L^r(\Omega))} &= \int_0^T \Big(\int_\Omega |f_n(t) - f(t)|^r \, |v(x)|^r \, dx \Big)^{\frac{p}{r}} \, dt \\ &= \|v\|^p_{L^r(\Omega)} \, \|f_n - f\|^p_{L^p(I)} \end{aligned}$$

und somit konvergiert $u_n \to u$ in $L^p(I;L^r(\Omega))$ $(n \to \infty)$ genau dann, wenn $f_n \to f$ in $L^p(I)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir allerdings A_2 nur auf dem Raum

$$W = \big\{ u \in L^p(I;W_0^{1,p}(\Omega)) \,\big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p'}(I;W_0^{1,p}(\Omega))^* \big\}$$

betrachten, erhalten wir eine kompakte Einbettung für W.

Wir betrachten folgende allgemeine Situation. Seien B, B_0, B_1 Banachräume, wobei B_0 und B_1 reflexiv sind und folgende Einbettungen gelten:

$$B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1 \,, \tag{3.38}$$

$$B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B \,, \tag{3.39}$$

d.h. B_0 bettet kompakt in B ein. Wir bezeichnen

$$W_0 = \big\{ u \in L^{p_0}(I;B_0) \,\big|\, \frac{du}{dt} \in L^{p_1}(I;B_1) \big\} \,, \tag{3.40}$$

mit $1 < p_0, p_1 < \infty$, und versehen W_0 mit der Norm

$$\|u\|_{W_0} = \|u\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + \big\|\frac{du}{dt}\big\|_{L^{p_1}(I;B_1)} \,.$$

Offensichtlich ist W_0 ein reflexiver Banachraum und es gilt:

$$W_0 \hookrightarrow L^{p_0}(I;B) \,. \tag{3.41}$$

Allerdings haben wir folgendes stärkere Resultat:

3.42 Satz (Aubin 1963, Lions 1969). *Unter den Voraussetzungen (3.38), (3.39) und $1 < p_0, p_1 < \infty$ ist die Einbettung (3.41) kompakt, d.h.*

$$W_0 \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p_0}(I;B) \,. \tag{3.43}$$

Bevor wir dies beweisen benötigen wir noch folgendes Resultat:

3.44 Lemma. *Unter den Voraussetzungen* (3.38) *und* (3.39) *gibt es für alle* $\eta > 0$ *eine Konstante* $d(\eta)$ *so, dass für alle* $v \in B_0$ *gilt:*

$$\|v\|_B \le \eta \|v\|_{B_0} + d(\eta)\|v\|_{B_1} . \tag{3.45}$$

Beweis. Falls (3.45) nicht gilt, gibt es ein $\eta > 0$ und Folgen $(v_n) \subset B_0$ und $(d_n) \subset \mathbb{R}^+, d_n \to \infty \, (n \to \infty)$ so, dass

$$\|v_n\|_B \ge \eta \|v_n\|_{B_0} + d_n \|v_n\|_{B_1} .$$

Wir setzen $w_n = v_n / \|v_n\|_{B_0}$ und erhalten

$$\|w_n\|_B \ge \eta + d_n \|w_n\|_{B_1} . \tag{3.46}$$

Aufgrund der Einbettung (3.38) gilt

$$\|w_n\|_B \le c \, \|w_n\|_{B_0} = c \, ,$$

und somit folgt aus (3.46) und $d_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, dass

$$\|w_n\|_{B_1} \to 0 \qquad (n \to \infty) . \tag{3.47}$$

Allerdings gilt $\|w_n\|_{B_0} = 1$ nach Konstruktion. Somit folgt aus der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$, dass es eine Teilfolge (w_{n_k}) gibt so, dass

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B \qquad (k \to \infty) .$$

Aus der Einbettung $B \hookrightarrow B_1$ folgt sofort

$$w_{n_k} \to w \ \text{ in } B_1 \qquad (k \to \infty) ,$$

was zusammen mit (3.47) liefert $w = 0$. Insgesamt haben wir also

$$\|w_{n_k}\|_B \to 0 \qquad (k \to \infty) ,$$

was ein Widerspruch zu (3.46) ist, da $\eta > 0$. ■

Beweis (Satz 3.42). Sei (v_n) eine beschränkte Folge in W_0. Da W_0 reflexiv ist, gibt es eine Teilfolge (v_{n_k}) für die gilt:

$$v_{n_k} \rightharpoonup v \ \text{ in } W_0 \qquad (k \to \infty) .$$

Durch Übergang zur Folge $u_k = v_{n_k} - v$ gilt also

$$\begin{aligned} &u_n \rightharpoonup 0 && \text{in } W_0 \qquad (n \to \infty) , \\ &\|u_n\|_W \le c && \forall n \in \mathbb{N} . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Aufgrund von Lemma 3.44 gibt es für alle $\eta > 0$ ein $d(\eta)$ mit

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \eta \|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} + d(\eta)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)} . \tag{3.49}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Aus $(3.48)_2$ und (3.49) mit $\eta = \frac{\varepsilon}{2c}$ erhalten wir

$$\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B)} \le \frac{\varepsilon}{2} + d(\varepsilon)\|u_n\|_{L^{p_0}(I;B_1)} .$$

Um den Satz zu beweisen reicht es also zu zeigen, dass

$$u_n \to 0 \qquad \text{in } L^{p_0}(I;B_1) \qquad (n \to \infty) . \tag{3.50}$$

Aus der Definition von W_0 und der Einbettung $W^{1,p_1}(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ folgt sofort

$$W_0 \hookrightarrow W^{1,p_1}(I;B_1) \hookrightarrow C(\bar{I};B_1) . \tag{3.51}$$

Aus dieser Einbettung und $(3.48)_2$ erhalten wir weiter, dass für alle $t \in I$ gilt:

$$\|u_n(t)\|_{B_1} \le c . \tag{3.52}$$

Wir definieren für $0 < \lambda < 1$ fest, aber beliebig,

$$w_n(t) = u_n(\lambda t) \tag{3.53}$$

und erhalten unter Benutzung von $(3.48)_2$

$$\begin{aligned} w_n(0) &= u_n(0) , \\ \|w_n\|_{L^{p_0}(I;B_0)} &= \frac{1}{\lambda^{\frac{1}{p_0}}} \|u_n\|_{L^{p_0}(0,\lambda T;B_0)} \le c\,\lambda^{-\frac{1}{p_0}} , \\ \|\frac{d}{dt} w_n\|_{L^{p_1}(I;B_1)} &= \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{p_1}}} \|\frac{d}{dt} u_n\|_{L^{p_1}(0,\lambda T;B_1)} \le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} . \end{aligned} \tag{3.54}$$

Sei $\varphi \in C^1(I)$ derart, dass $\varphi(T) = 0, \varphi(0) = -1$. Dann gilt:

$$w_n(0) = \int_0^T \frac{d}{dt}\big(w_n(t)\varphi(t)\big)\,dt = \int_0^T \varphi(t)\,\frac{dw_n(t)}{dt}\,dt + \int_0^T \frac{d\varphi(t)}{dt}\,w_n(t)\,dt ,$$

was zusammen mit $(3.54)_3$ liefert

$$\begin{aligned} \|w_n(0)\|_{B_1} &\le c(\varphi) \left\| \frac{dw_n}{dt} \right\|_{L^{p_1}(I;B_1)} + \left\| \int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt \right\|_{B_1} \\ &\le c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} + \left\| \int_0^T \frac{d\varphi}{dt} w_n\,dt \right\|_{B_1} . \end{aligned} \tag{3.55}$$

Da $p_1 > 1$ ist, können wir λ derart wählen, dass

$$c\,\lambda^{1-\frac{1}{p_1}} \le \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.56}$$

gilt. Weiter haben wir für alle $g \in B_0^*$

$$\begin{aligned}\Big\langle g, \int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\, dt\Big\rangle_{B_0} &= \int_0^T \langle g, w_n\rangle_{B_0} \frac{d\varphi}{dt}\, dt \\ &= \int_0^{\lambda T} \Big\langle g\, \frac{d\varphi}{ds}\big(\frac{s}{\lambda}\big), u_n(s)\Big\rangle_{B_0} \frac{1}{\lambda}\, ds \to 0 \qquad (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$

da $\frac{d\varphi}{ds} g \in L^{p_0'}(0, \lambda T; B_0^*)$ und $u_n \rightharpoonup 0$ in $L^{p_0}(0, \lambda T; B_0)$ $(n \to \infty)$ aufgrund von (3.48) und $0 < \lambda < 1$. Also haben wir gezeigt, dass

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\, dt \rightharpoonup 0 \ \text{ in } B_0 \qquad (n \to \infty)\,,$$

was aufgrund der kompakten Einbettung $B_0 \hookrightarrow\hookrightarrow B$ impliziert

$$\int_0^T w_n \frac{d\varphi}{dt}\, dt \to 0 \ \text{ in } B \qquad (n \to \infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.55), (3.56) und$B \hookrightarrow\hookrightarrow B_1$ ergibt, da ε beliebig war,

$$u_n(0) = w_n(0) \to 0 \ \text{ in } B_1 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Sei nun $s \in I$ beliebig. Ein völlig analoges Vorgehen mit w_n ersetzt durch

$$\widetilde{w}_n(t) = u_n(s + \lambda t)\,,$$

liefert sofort für alle $s \in I$

$$u_n(s) \to 0 \ \text{ in } B_1 \qquad (n \to \infty)\,.$$

Dies zusammen mit (3.52) und dem Satz über dominierte Konvergenz liefert (3.50) und der Satz ist bewiesen. ■

Wir benötigen einen weiteren Einbettungssatz für den Raum W.

3.57 Lemma. *Sei $\frac{2n}{n+2} \le p < n$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n, n \ge 2$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Für das Gelfand–Tripel $\big(W_0^{1,p}(\Omega), L^2(\Omega), (W_0^{1,p}(\Omega))^*\big)$ und für alle Funktionen aus dem Raum W, definiert in (3.10), gilt:*

$$\int_I \int_\Omega |u(t,x)|^q\, dx\, dt \le c \int_I \int_\Omega |\nabla u(t,x)|^p\, dx\, dt \,\Big(\sup_{t \in I} \int_\Omega |u(t,x)|^2\, dx\Big)^{\frac{p}{n}}\,,$$

wobei

$$q = \frac{n+2}{n} p\,. \tag{3.58}$$

Beweis. Aus Lemma 3.11 folgt die Einbettung $W \hookrightarrow C(I; H)$, d.h.

$$\sup_{t \in I} \|u(t)\|_{L^2} \le c\, \|u\|_W\,. \tag{3.59}$$

Mit Hilfe der Hölder–Ungleichung erhalten wir für $r \ge 2$

$$\|u\|_{L^r} = \Big(\int_\Omega |u|^{r\alpha}|u|^{r(1-\alpha)}\,dx\Big)^{\frac{1}{r}} \le \|u\|^\alpha_{L^{r\alpha\delta}}\|u\|^{1-\alpha}_{L^{r(1-\alpha)\delta'}}\,, \tag{3.60}$$

für $\alpha \in (0,1)$ und $\frac{1}{\delta}+\frac{1}{\delta'}=1$. Die Forderungen

$$r\alpha\delta = \frac{np}{n-p} \qquad r(1-\alpha)\delta' = 2 \tag{3.61}$$

liefern

$$\alpha = \frac{np(r-2)}{r(np+2p-2n)}\,. \tag{3.62}$$

Aus (3.60), zur Potenz r, folgt nach Integration über das Zeitintervall I und mithilfe der Einbettung $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$

$$\begin{aligned}\int_I \|u(t)\|^r_{L^r}\,dt &\le c\int_I \|u(t)\|^{\alpha r}_{W^{1,p}}\|u(t)\|^{(1-\alpha)r}_{L^2}\,dt\\ &\le c\sup_{t\in I}\|u(t)\|^{(1-\alpha)r}_{L^2}\int_I \|u(t)\|^{\alpha r}_{W^{1,p}}\,dt\,.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Nun müssen wir sicherstellen, dass $\alpha r = p$ gilt, was zusammen mit (3.62) liefert

$$r = p\,\frac{2+n}{n}$$

und $(1-\alpha)r = \frac{2}{n}\,p$. Dies eingesetzt in (3.63) liefert (3.57). ■

• Aufgrund von (3.59) kann man die Behauptung aus Lemma 3.57 auch schreiben als

$$\|u\|_{L^q(I\times\Omega)} \le c\,\|u\|_W\,, \qquad q = p\,\frac{n+2}{n}\,. \tag{3.64}$$

3.65 Folgerung. *Unter den Bedingungen von Lemma 3.57 ist die Einbettung*

$$W \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(I\times\Omega)$$

kompakt, falls

$$q < p\,\frac{n+2}{n}\,. \tag{3.66}$$

Beweis. Wenn man im Beweis von Lemma 3.57 anstatt (3.61) fordert, dass

$$r\alpha\delta = s < \frac{np}{n-p} \qquad r(1-\alpha)\delta' = 2$$

erhält man

$$\alpha = \frac{s(2-r)}{r(s-2)}\,.$$

Wie im Beweis von Lemma 3.57 folgt dann

$$\int_I \|u\|^r_{L^r}\,dt \le c\sup_{t\in I}\|u(t)\|^{r-p}_{L^2}\int_I \|u(t)\|^p_{L^s}\,dt \tag{3.67}$$