1.3 Definition. *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und sei $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ derart, dass alle Punkte in $f^{-1}(p)$ regulär sind. Dann definieren wir den **Abbildungsgrad** durch*

$$d(f, \Omega, p) := \sum_{x \in f^{-1}(p)} \operatorname{sgn} J(f(x)) \,.$$

- Aus Lemma 1.2 folgt, dass die Summe in der Definition endlich ist.
- Offensichtlich ist $d(f, \Omega, p) \in \mathbb{Z}$.
- Falls $f^{-1}(p) = \emptyset$, definieren wir $d(f, \Omega, p) := 0$.

Wir wollen nun die Definition auf solche Fälle verallgemeinern, bei denen

(i) $f^{-1}(p)$ nichtreguläre Punkte enthält,
(ii) $f \in C(\overline{\Omega})$.

In beiden Fällen benutzen wir dazu Approximationsargumente. Wir werden dabei wie folgt vorgehen:

(i) Sei K die Menge der kritischen Punkte, d.h.

$$K := \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$$

und sei $p \in f(K) \setminus f(\partial\Omega)$. Der Satz von Sard liefert, dass $m(f(K)) = 0$, wobei m das Lebesgue–Maß bezeichnet. Daher hat $f(K)$ keine inneren Punkte und es gibt eine Folge $p_n \to p$ $(n \to \infty)$ mit

$$p_n \notin f(K) \,, \qquad p_n \notin f(\partial\Omega) \,. \tag{1.4}$$

Wir werden zeigen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$$

existiert und zwar unabhängig von der Wahl der Folge (p_n). Daher können wir für $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ definieren

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n) \,.$$

(ii) Zu $f \in C(\overline{\Omega})$ gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstraß eine Folge von Polynomen (f_n), so dass $f_n \rightrightarrows f$ auf $\overline{\Omega}$ $(n \to \infty)$ mit

$$f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \,, \qquad p \notin f_n(\partial\Omega) \,. \tag{1.5}$$

Wir werden beweisen, dass der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$$

existert und unabhängig von der Wahl der Folge (f_n) ist. Danach können wir für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ definieren

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p) \,.$$

4.1.2 Technische Hilfsmittel

Es folgen nun einige technische Lemmata, die uns die Erweiterung der Definition 1.3 auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen ermöglichen werden.

1.6 Satz (Sard 1942). *Sei $f \in C^1(\Omega)$ und sei G eine offene Teilmenge mit $\overline{G} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$m\big(f(G \cap K)\big) = 0\,,$$

wobei $K = \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$ die Menge aller kritischen Punkte ist.

Beweis. Da Ω beschränkt ist, gibt es einen Würfel $R := [-a, a]^n$, $a > 0$, so, dass $\Omega \subseteq R$. Wir überdecken den Würfel R mit abgeschlossenen Würfeln r_i der Seitenlänge $l < \frac{1}{2\sqrt{n}} \operatorname{dist}(\overline{G}, \mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Dann gibt es endlich viele Würfel $r_i \subseteq \Omega, i = 1, \ldots, N$, mit

$$\overline{G} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} r_i =: G_1\,.$$

Wir zeigen, dass das Bild der Menge aller kritischen Punkte in G, d.h. die Menge $K \cap G$, in G_1 eine Lebesgue–Nullmenge ist.

1. Sei dazu r_i einer der Würfel mit Seitenlänge l. Aufgrund der Voraussetzung ist $\nabla f \in C(\Omega)$ auf G_1 gleichmäßig stetig und beschränkt, d.h. es existiert ein $L > 0$ mit

$$\|\nabla f(p)\| \leq L \qquad \forall p \in G_1\,, \tag{1.7}$$

und es existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $p_1, p_2 \in G_1$ mit $\|p_1 - p_2\| < \frac{l}{m}\sqrt{n} =: \delta$ gilt:

$$\|\nabla f(p_1) - \nabla f(p_2)\| \leq \varepsilon\,. \tag{1.8}$$

Also gilt nach dem Mittelwertsatz für alle p_1, $p_2 \in G_1$ mit $\|p_1 - p_2\| < \delta$

$$\begin{aligned}
&\|f(p_1) - f(p_2) - \nabla f(p_2)(p_1 - p_2)\| \\
&\leq \int_0^1 \|\nabla f(p_2 + t(p_1 - p_2)) - \nabla f(p_2)\|\, \|p_1 - p_2\|\, dt \\
&\leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\, \delta\,.
\end{aligned}$$

2. Nun zerlegen wir r_i in m^n Würfel r_{ij} der Seitenlänge $\frac{l}{m} = \frac{\delta}{\sqrt{n}}$ und wählen einen festen aber beliebigen Würfel r_{ij}. Nach 1. gilt für alle $p_1, p_2 \in r_{ij}$

$$f(p_1) = f(p_2) + \nabla f(p_2)(p_1 - p_2) + R(p_2, p_1) \tag{1.9}$$

mit

$$\|R(p_2, p_1)\| \leq \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\, \delta\,. \tag{1.10}$$

Sei nun $p_2 \in r_{ij}$ ein kritischer Punkt und sei

$$r_{ij} - p_2 := \{y - p_2 \in \mathbb{R}^n \mid y \in r_{ij}\}.$$

Wir definieren eine Abbildung $T\colon r_{ij} - p_2 \to \mathbb{R}^n$ durch

$$\begin{aligned} T(p) &= f(p_2 + p) - f(p_2) \\ &= \nabla f(p_2)\, p + \tilde{R}(p), \end{aligned}$$

mit $\tilde{R}(p) := R(p_2, p + p_2)$. Aus (1.9) und (1.10) (ersetze p_1 durch $p + p_2$) erhalten wir

$$\|\tilde{R}(p)\| \le \varepsilon \frac{l}{m} \sqrt{n} = \varepsilon\, \delta. \tag{1.11}$$

Da p_2 ein kritischer Punkt ist, gilt $\det(\nabla f(p_2)) = 0$, d.h. der Rang von $\nabla f(p_2)$ ist höchstens $n-1$. Also ist das Bild der Menge $r_{ij} - p_2$ unter $\nabla f(p_2)$ in einem $(n-1)$–dimensionalem Raum enthalten. Deshalb gibt es ein $b_1 \in \mathbb{R}^n$, $\|b_1\| = 1$ so, dass

$$(b_1, y) = 0 \qquad \forall y \in (\nabla f(p_2))(r_{ij} - p_2),$$

wobei $(\cdot,\cdot)$ für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ steht. Wir ergänzen b_1 durch $b_2, \dots, b_n$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$. Dann können wir schreiben

$$T(p) = \sum_{k=1}^{n} (T(p), b_k)\, b_k.$$

Es gilt für alle $p \in r_{ij} - p_2$

$$\begin{aligned} |(T(p), b_1)| &\le |(\nabla f(p_2)p, b_1)| + |(\tilde{R}(p), b_1)| \\ &\le 0 + \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} = \varepsilon\, \delta, \\ |(T(p), b_k)| &\le |(\nabla f(p_2)p, b_k)| + |(\tilde{R}(p), b_k)| \qquad k = 2, \dots, n \\ &\le L\, \|p\|\, \|b_k\| + \|\tilde{R}(p)\|\, \|b_k\| \\ &\le L\, \frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n} \\ &\le L\, \delta + \varepsilon\, \delta, \end{aligned}$$

da $\|p\| \le \frac{l}{m}\sqrt{n}$.

3. Nach Definition von $T(\cdot)$ gilt:

$$T(r_{ij} - p_2) = f(r_{ij}) - f(p_2).$$

Da das Lebesgue–Maß invariant gegenüber Verschiebungen ist, erhalten wir also

$$m(f(r_{ij})) = m(T(r_{ij} - p_2)) \le \Big(L \frac{l}{m}\sqrt{n} + \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n}\Big)^{n-1} \varepsilon \frac{l}{m}\sqrt{n}.$$

Falls r_i einen kritischen Punkt enthält, gilt demnach

$$\begin{aligned} m(f(r_i \cap K)) &\le \sum_{j=1}^{m^n} m(f(r_{ij} \cap K)) \\ &\le m^n \frac{1}{m^n} (L\, l\, \sqrt{n} + \varepsilon\, l\, \sqrt{n})^{n-1}\, \varepsilon\, l\, \sqrt{n} \\ &\le c(n, G, \Omega, f)\, \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Da ε beliebig gewählt war, folgt $m(f(r_i)) = 0$, falls r_i einen kritischen Punkt enthält.

4. Somit erhalten wir

$$m(f(G \cap K)) = 0\,,$$

da die Würfel r_i die Menge G überdecken. ∎

• Aus dem Satz von Sard erhalten wir sofort

$$m(f(K)) = 0\,,$$

wobei $K = \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$. Dazu wählen wir

$$G_n = \{x \in \Omega \,\big|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) \ge \frac{1}{n}\}\,.$$

Dann gilt $\overline{G}_n \subseteq \Omega$ und $\Omega \subseteq \bigcup_n G_n$. Aus den Eigenschaften des Lebesgue–Maßes folgt also

$$m(f(\Omega \cap K)) \le \sum_n m(f(G_n \cap K)) = 0\,.$$

Sei nun $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und $p \in f(\overline{\Omega}) \setminus f(\partial\Omega)$. Die Menge $f^{-1}(p)$ enthalte nur reguläre Punkte. Dann ist diese Menge nach Lemma 1.2 endlich, d.h.

$$f^{-1}(p) = \{x_1, \ldots, x_k\}\,.$$

Nach dem Beweis von Lemma 1.2 gibt es zu jedem x_i, $i = 1, \ldots, k$, eine Umgebung $U(x_i)$ so, dass

(1) $U(x_i) \subseteq \Omega$

(2) $U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset, \qquad i \ne j\,,$

(3) $J(f(y)) \ne 0 \qquad \forall y \in \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)\,,$ (1.12)

(4) $f|_{U(x_i)}$ ist ein Homöomorphismus der Umgebung $U(x_i)$ auf eine Umgebung $f(U(x_i))$ von p und ist insbesondere eineindeutig.

Wir setzen

$$\psi(y) := f(y) - p\,. \tag{1.13}$$

Dann ist $\psi(U(x_i))$ eine Umgebung von 0. Demzufolge existiert ein $\eta > 0$ mit

$$\bigcap_{i=1}^{k} \psi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0)\,.$$

Nach (1.12) gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ gilt:

$$\|\psi(y)\| \geq \delta\,, \tag{1.14}$$

denn für $y \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ ist $\|\psi(y)\| > 0$. Außerdem ist $y \mapsto \|\psi(y)\|$ stetig und nimmt daher auf dem Kompaktum $\overline{\Omega} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} U(x_i)$ ein Minimum an, d.h. (1.14) gilt.

1.15 Lemma. *Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, sei $p \in f(\overline{\Omega}) \setminus f(\partial\Omega)$ und enthalte $f^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte. Ferner sei $\varphi \in C([0,\infty)) \cap C^\infty(0,\infty)$ mit*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(\|x\|)\, dx = 1 \tag{1.16}$$

und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\delta,\eta))$. *Dann gilt:*

$$\int\limits_{\Omega} \varphi(\|f(x) - p\|) J(f(x))\, dx = d(f, \Omega, p)\,. \tag{1.17}$$

Beweis. Offensichtlich ist

$$J(f(x)) = J(\psi(x))\,,$$

denn $\psi = f - p$. Aus (1.14) und $\operatorname{supp}\varphi \subseteq [0, \min(\eta,\delta))$; der Eigenschaft $\operatorname{sgn} J(\psi(x)) = \operatorname{sgn} J(\psi(x_i))$ für alle $x \in U(x_i)$; dem Transformationssatz sowie $\psi(U(x_i)) \supseteq B_\eta(0) \supset \operatorname{supp}\varphi$ und (1.16) folgt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \varphi(\|f(x) - p\|) J(f(x))\, dx &= \int\limits_{\Omega} \varphi(\|\psi(x)\|) J(\psi(x))\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \int\limits_{U(x_i)} \varphi(\|\psi(x)\|) J(\psi(x))\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)) \int\limits_{U(x_i)} \varphi(\|\psi(x)\|) |J(\psi(x))|\, dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)) \int\limits_{\psi(U(x_i))} \varphi(\|x\|)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(\psi(x_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J(f(x_i)) \\
&= \sum_{x \in f^{-1}(p)} J(f(x)) = d(f, \Omega, p)\,,
\end{aligned}
$$

d.h. (1.17) ist bewiesen. ∎

• Die rechte Seite von Formel (1.17) ist unabhängig von der Wahl von φ mit den in Lemma 1.15 geforderten Eigenschaften. Daher ist auch die linke Seite von Formel (1.17) unabhängig von der Wahl von φ.

1.18 Lemma. *Sei $p \in \mathbb{R}^n$ und seien die Funktionen $f_i \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ Elemente des Raumes $C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$ klein genug so, dass*

$$
\begin{aligned}
\|f_i(x) - p\| &\ge 7\varepsilon \qquad &&\text{für } i = 1, 2 \text{ und } x \in \partial\Omega\,, \\
\|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon &&\text{für } x \in \overline{\Omega}\,.
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

Ferner seien alle Punkte aus $f_i^{-1}(p)$, $i = 1, 2$, regulär. Dann gilt

$$
d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p)\,. \tag{1.20}
$$

Beweis. O.B.d.A. sei $p = 0$. Wir wählen eine glatte Abschneidefunktion $\gamma \colon [0, \infty) \to [0, 1]$ mit

$$
\begin{aligned}
\gamma(r) &= 1\,, \qquad &&\text{falls } 0 \le r \le 2\,\varepsilon\,, \\
\gamma(r) &= 0\,, &&\text{falls } 3\,\varepsilon \le r\,,
\end{aligned}
$$

und definieren

$$
f_3(x) := \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x)\,.
$$

Offensichtlich haben wir $f_3 \in C^1\big(\Omega \setminus f_1^{-1}(0)\big) \cap C(\overline{\Omega})$. Da alle Punkte aus $f_1^{-1}(0)$ regulär sind, erhalten wir mithilfe von (1.12), $\gamma'(r) = 0$ für $r \in [0, 2\,\varepsilon]$ und der Beschränktheit der Ableitung von $\|\cdot\|$, dass man ∇f_3 durch Null stetig auf $f_1^{-1}(0)$ fortsetzen kann, d.h. $f_3 \in C^1\big(\Omega\big) \cap C(\overline{\Omega})$. Darüber hinaus gilt für $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$,

$$
\begin{aligned}
&\|f_i(x) - f_3(x)\| \\
&= \big\|\big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_i(x) + \gamma(\|f_1(x)\|) f_i(x) \\
&\qquad - \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) f_1(x) - \gamma(\|f_1(x)\|) f_2(x)\big\| \\
&\le \big(1 - \gamma(\|f_1(x)\|)\big) \|f_i(x) - f_1(x)\| + \gamma(\|f_1(x)\|) \|f_i(x) - f_2(x)\| \\
&\le \varepsilon\,.
\end{aligned}
\tag{1.21}
$$

Da $7\,\varepsilon \le \|f_1(x)\| \le \|f_1(x)-f_3(x)\| + \|f_3(x)\| \le \varepsilon + \|f_3(x)\|$, haben wir

$$\|f_3(x)\| \ge 6\,\varepsilon \qquad \text{für } x \in \partial\Omega\,,$$

und somit $0 \notin f(\partial\Omega)$. Aufgrund der Definition von f_3 gilt:

$$\begin{aligned} f_3(x) &= f_1(x)\,, && \text{falls } \|f_1(x)\| > 3\,\varepsilon\,,\\ f_3(x) &= f_2(x)\,, && \text{falls } \|f_1(x)\| < 2\,\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Sei $x \in f_3^{-1}(0)$ und sei $\delta > 0$ so, dass für alle $y \in B_\delta(x)$ gilt: $\|f_3(y)\| < \varepsilon$. Für diese y erhalten wir aufgrund von (1.21)

$$\|f_1(x)\| \le \|f_1(x)-f_3(x)\| + \|f_3(x)\| < 2\,\varepsilon\,.$$

Dies zusammen mit (1.22) liefert $f_2(y) = f_3(y)$ für alle $y \in B_\delta(x)$, insbesondere $f_2(x) = 0$, d.h. x ist ein regulärer Punkt. Also erfüllen f_3 und der Punkt 0 die Voraussetzungen von Lemma 1.15. Wir wählen φ_1, φ_2 mit den Eigenschaften von φ aus Lemma 1.15 sowie mit

$$\begin{aligned} \varphi_1(r) &= 0\,, && \text{für } r \in [0, 4\,\varepsilon] \cup [5\,\varepsilon, \infty)\,,\\ \varphi_2(r) &= 0\,, && \text{für } r \in [\varepsilon, \infty)\,. \end{aligned}$$

Dann erhalten wir

$$\varphi_1(\|f_3(x)\|)J(f_3(x)) = \varphi_1(\|f_1(x)\|)J(f_1(x))\,,$$

denn $\varphi_1(r)$ ist nur ungleich Null, falls $r > 4\,\varepsilon$. Aber für $\|f_3(x)\| > 4\,\varepsilon$ gilt:

$$\|f_1(x)\| \ge \|f_3(x)\| - \|f_1(x)-f_3(x)\| > 4\,\varepsilon - \varepsilon = 3\,\varepsilon\,,$$

und deshalb gilt: $f_1(x) = f_3(x)$. Weiterhin haben wir

$$\varphi_2(\|f_3(x)\|)J(f_3(x)) = \varphi_2(\|f_2(x)\|)J(f_2(x))\,,$$

denn $\varphi_2(r)$ ist nur ungleich Null, falls $r < \varepsilon$. Sei also $\|f_3(x)\| < \varepsilon$, dann gilt:

$$\|f_1(x)\| \le \|f_1(x)-f_3(x)\| + \|f_3(x)\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\,\varepsilon\,,$$

und somit gilt: $f_3(x) = f_2(x)$. Nach obiger Bemerkung und Lemma 1.15 folgt daher

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, 0) &= \int_\Omega \varphi_1(\|f_1(x)\|)J(f_1(x))\,dx\\ &= \int_\Omega \varphi_1(\|f_3(x)\|)J(f_3(x))\,dx\\ &= \int_\Omega \varphi_2(\|f_3(x)\|)J(f_3(x))\,dx\\ &= \int_\Omega \varphi_2(\|f_2(x)\|)J(f_2(x))\,dx \;=\; d(f_2, \Omega, 0)\,. \end{aligned}$$

Somit ist das Lemma bewiesen. ■

1.23 Lemma. *Seien $f_i \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$, $z_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ und sei $\varepsilon > 0$ klein genug. Weiterhin nehmen wir an, dass*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - z_j\| &\geq 7\varepsilon\,, &&\text{für } i, j = 1, 2,\ x \in \partial\Omega\,, \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon\,, &&\text{für } x \in \overline{\Omega}\,, \\ \|z_1 - z_2\| &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Ferner seien alle Punkte von $f_i^{-1}(z_j)$, $i, j = 1, 2$, regulär. Dann gilt

$$d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)\,.$$

Beweis. Nach Lemma 1.18 gilt $d(f_1, \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_1)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} g_1(x) &:= f_2(x)\,, \\ g_2(x) &:= f_2(x) + (z_1 - z_2)\,. \end{aligned}$$

Die Funktionen $g_1, g_2 \in C^1(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ und der Punkt z_1 erfüllen die Voraussetzungen von Lemma 1.18, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \|g_1(x) - z_1\| &= \|f_2(x) - z_1\| \geq 7\varepsilon\,, \\ \|g_2(x) - z_1\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - z_1\| \geq 7\varepsilon\,, \\ \|g_2(x) - g_1(x)\| &= \|f_2(x) + z_1 - z_2 - f_2(x)\| < \varepsilon\,, \end{aligned}$$

sowie $g_1^{-1}(z_1) = f_2^{-1}(z_1)$ und

$$\begin{aligned} g_2^{-1}(z_1) &= \{x \in \Omega \,\big|\, f_2(x) + z_1 - z_2 = z_1\} = \{x \in \Omega \,\big|\, f_2(x) = z_2\} \\ &= f_2^{-1}(z_2)\,, \end{aligned} \tag{1.24}$$

d.h. alle Punkte von $g_i^{-1}(z_1)$, $i = 1, 2$, sind regulär. Lemma 1.18 liefert also

$$d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1)\,.$$

Aus (1.24) folgt auch

$$d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) = d(f_2, \Omega, z_2)\,.$$

Außerdem haben wir $\nabla f_2 = \nabla g_2$ und somit auch

$$\sum_{x \in f_2^{-1}(z_2)} \operatorname{sgn} J(f_2(x)) = \sum_{x \in g_2^{-1}(z_1)} \operatorname{sgn} J(g_2(x))\,.$$

Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} d(f_1, \Omega, z_1) &= d(f_2, \Omega, z_1) = d(f_2 + (z_1 - z_2), \Omega, z_1) \\ &= d(f_2, \Omega, z_2)\,. \end{aligned}$$

Somit ist die Behauptung des Lemmas bewiesen. ∎

4.1.3 Erweiterung auf nichtreguläre Punkte und stetige Funktionen

Nun können wir die Idee zur Konstruktion des Abbildungsgrades $d(f, \Omega, p)$ für Punkte $p \in \mathbb{R}^n$, deren Urbild $f^{-1}(p)$ nichtreguläre Punkte enthält, rigoros ausführen.

Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und sei $p \in f(K) \setminus f(\partial\Omega)$, wobei

$$K = \{x \in \Omega \,\big|\, J(f(x)) = 0\}$$

die Menge aller irregulären Punkte ist. Der Rand $\partial\Omega$ ist abgeschlossen und beschränkt und somit kompakt. Also erhalten wir, da $p \notin f(\partial\Omega)$, dass gilt:

$$\|f(x) - p\| > 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$

und somit gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|f(x) - p\| \geq 8\,\varepsilon\,.$$

Aus dem Satz von Sard haben wir gefolgert, dass $m(f(K)) = 0$ ist, also hat $f(K)$ hat keine inneren Punkte. Daher gibt es eine Folge (p_n) mit

$$\begin{aligned} &p_n \to p \qquad (n \to \infty)\,,\\ &p_n \notin f(\partial\Omega)\,,\\ &p_n \notin f(K)\,. \end{aligned} \tag{1.25}$$

Außerdem gibt es ein n_0 so, dass für alle $n, k \geq n_0$ gilt $\|p_k - p_n\| < \varepsilon$. Der Grenzübergang $k \to \infty$ liefert, dass dann auch für alle $n \geq n_0$ gilt: $\|p - p_n\| \leq \varepsilon$. Dies hat zur Folge, dass für alle $n \geq n_0$

$$\|f(x) - p_n\| \geq \|f(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon\,.$$

Lemma 1.23 impliziert daher, dass für alle $n, k \geq n_0$ gilt:

$$d(f, \Omega, p_k) = d(f, \Omega, p_n)\,.$$

Der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)$ existiert also, und wir setzen

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f, \Omega, p_n)\,.$$

Es bleibt zu zeigen, dass der Grenzwert unabhängig von der Wahl der Folge (p_n) ist. Sei dazu (q_n) eine Folge mit $q_n \to p\,(n \to \infty)$, die (1.25) erfüllt. Dann gibt es ein n_1 so, dass für alle $n \geq n_1$ gilt: $\|p_n - q_n\| \leq \varepsilon$ und somit liefert Lemma 1.23

$$d(f, \Omega, q_n) = d(f, \Omega, p_n)\,.$$

Damit ist nun $d(f, \Omega, p)$ für $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ eindeutig definiert.

Um den Abbildungsgrad auf Funktionen $f \in C(\overline{\Omega})$ zu verallgemeinern benötigen wir noch ein Lemma.

1.26 Lemma. *Seien* $f_i \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$, $i = 1, 2$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ *und sei* $\varepsilon > 0$ *klein genug. Wir nehmen an, dass gilt:*

$$\begin{aligned} \|f_i(x) - p\| &\geq 8\,\varepsilon & \forall x \in \partial\Omega,\ i = 1,\ 2\,, \\ \|f_1(x) - f_2(x)\| &< \varepsilon & \forall x \in \overline{\Omega}\,. \end{aligned}$$

Dann gilt auch

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p)\,.$$

Beweis. 1. Falls $f_1^{-1}(p) \cup f_2^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte enthält, folgt die Behauptung aus Lemma 1.18.

2. Falls $f_1^{-1}(p) \cup f_2^{-1}(p)$ irreguläre Punkte enthält, wählen wir eine Folge (p_n), die (1.25) bezüglich f_1 und f_2 erfüllt. Dann gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ gilt:

$$\|f_i(x) - p_n\| \geq \|f_i(x) - p\| - \|p - p_n\| \geq 7\varepsilon \qquad i = 1,\ 2\,.$$

Aus Lemma 1.18 folgt daher $d(f_1, \Omega, p_n) = d(f_2, \Omega, p_n)$. Im Grenzübergang für $n \to \infty$ ergibt sich die Behauptung

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p)\,.$$

■

Sei jetzt $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Da $p \notin f(\partial\Omega)$ und $\partial\Omega$ abgeschlossen und beschränkt ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|f(x) - p\| \geq 9\,\varepsilon\,.$$

Also gibt es nach dem Approximationssatz von Weierstraß eine Folge von Funktionen mit

$$\begin{aligned} & f_n \rightrightarrows f \ \text{ in } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,, \\ & f_n \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})\,, \\ & p \notin f_n(\partial\Omega)\,. \end{aligned} \tag{1.27}$$

Ferner existiert ein n_0 so, dass für alle n, $k \geq n_0$ und $x \in \overline{\Omega}$,

$$\|f_n(x) - f_k(x)\| < \varepsilon\,,$$

da $f_n \rightrightarrows f$ $(n \to \infty)$ auf $\overline{\Omega}$. Deshalb gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq 8\,\varepsilon \qquad \forall x \in \partial\Omega,\ \forall n \geq n_0.$$

Nach Lemma 1.26 gilt also für alle n, $k \geq n_0$

$$d(f_k, \Omega, p) = d(f_n, \Omega, p)$$

und daher existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)$, und er ist unabhängig von der Wahl der Folge (f_n). Füe eine weitere Folge (g_n), die (1.27) erfüllt, gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\|g_n(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon \qquad \forall n \ge n_1,\ \forall x \in \overline{\Omega}\,.$$

Wir setzen

$$d(f, \Omega, p) := \lim_{n\to\infty} d(f_n, \Omega, p)\,.$$

Somit ist nun für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$ der Abbildungsgrad definiert.

4.1.4 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Brouwer

1.28 Satz. *Seien Ω_1, Ω_2 disjunkte, beschränkte und offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, $f\colon \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to \mathbb{R}^n$ stetig und $p \in \mathbb{R}^n$, $p \notin f(\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2)$. Dann gilt:*

$$d(f, \Omega_1 \cup \Omega_2, p) = d(f, \Omega_1, p) + d(f, \Omega_2, p)\,.$$

Beweis. 1. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und sei p so, dass $f^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte enthält. Dann gilt:

$$\sum_{\substack{x\in f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_1\cup\Omega_2}} J(f(x)) = \sum_{\substack{f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_1}} J(f(x)) + \sum_{\substack{f^{-1}(p)\\ x\in\Omega_2}} J(f(x))$$

aufgrund der Disjunktheit der Mengen Ω_1 und Ω_2.

2. Sei $f \in C^1(\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$ und sei p so, dass $f^{-1}(p)$ irreguläre Punkte enthält. Wir wählen eine Folge (p_n), die (1.25) für $\Omega_1 \cup \Omega_2$ erfüllt. Nach 1. gilt die Behauptung für jedes p_n. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ folgt daher die Behauptung für p, da die Folge (p_n) (1.25) sowohl bezüglich Ω_1 als auch bezüglich Ω_2 erfüllt.

3. Sei $f \in C(\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2)$. Wir wählen eine Folge (f_n), die (1.27) für $\Omega_1 \cup \Omega_2$ erfüllt. 2. liefert die Behauptung für jedes f_n. Der Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann das Gewünschte, da die Folge (f_n) (1.27) sowohl bezüglich Ω_1 als auch bezüglich Ω_2 erfüllt. ∎

1.29 Satz. *Sei $f \in C(\overline{\Omega})$ und $p \notin f(\partial\Omega)$. Falls $d(f, \Omega, p) \ne 0$ ist, dann existiert ein $x_0 \in \Omega$ mit $f(x_0) = p$.*

Beweis. Sei dem nicht so und gelte also für alle $x \in \overline{\Omega}$: $f(x) \ne p$. Damit haben wir $\|f(x) - p\| > 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und, da f und die Norm stetig sind, existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass

$$\|f(x) - p\| \ge 2\,\varepsilon\,.$$

Sei (f_n) , die (1.27) erfüllt. Dann gibt es ein n_0 so, dass für alle $n \ge n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon\,.$$

Somit gilt für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle $n \geq n_0$

$$\|f_n(x) - p\| \geq \|f(x) - p\| - \|f(x) - f_n(x)\| \geq \varepsilon\,.$$

Also ist $f_n^{-1}(p) = \emptyset$ und $p \notin f_n(\partial\Omega)$. Aufgrund der Bemerkung nach Definition 1.3 erhalten wir

$$d(f_n, \Omega, p) = 0\,.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt $d(f, \Omega, p) = 0$. Das ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also gilt die Behauptung. ■

1.30 Satz. *Sei $f(x,t)\colon \overline{\Omega} \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig und sei $p \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt so, dass für alle $x \in \partial\Omega$, und alle $t \in [a,b]$ gilt: $f(x,t) \neq p$. Dann ist $t \mapsto d(f(\cdot,t), \Omega, p)$ konstant auf $[a,b]$.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert so, dass für alle $x \in \partial\Omega$, und alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$\|f(x,t) - p\| \geq 9\,\varepsilon\,.$$

Außerdem ist $f(x,t)$ gleichmäßig stetig auf $\overline{\Omega} \times [a,b]$, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ so, dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle t_1, t_2 mit $|t_1 - t_2| < \delta$ gilt:

$$|f(x,t_1) - f(x,t_2)| \leq \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Für t_1, t_2, mit $|t_1 - t_2| < \delta$, wählen wir zwei Folgen (f_{1n}) und (f_{2n}), die (1.27) erfüllen, insbesondere

$$\begin{aligned} f_{1n}(\cdot) &\rightrightarrows f(\cdot,t_1) \ \text{ auf } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,,\\ f_{2n}(\cdot) &\rightrightarrows f(\cdot,t_2) \ \text{ auf } \overline{\Omega} \quad (n \to \infty)\,. \end{aligned}$$

Dann existiert ein n_0 so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$, gilt:

$$\|f(x,t_i) - f_{in}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und wir erhalten

$$\begin{aligned} \|f_{in}(x) - p\| &\geq \|p - f(x,t_i)\| - \|f_{in}(x) - f(x,t_i)\|\\ &\geq 8\,\varepsilon\,,\\ \|f_{1n}(x) - f_{2n}(x)\| &\leq \|f_{1n}(x) - f(x,t_1)\| + \|f(x,t_1) - f(x,t_2)\|\\ &\quad + \|f(x,t_2) - f_{2n}(x)\|\\ &< \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 1.26 erfüllt, welches

$$d(f_{1n}, \Omega, p) = d(f_{2n}, \Omega, p)$$

liefert. Im Grenzübergang $n \to \infty$ folgt für alle t_1, t_2, mit $|t_1 - t_2| < \delta$,

$$d(f(., t_1), \Omega, p) = d(f(., t_2), \Omega, p) .$$

Eine endliche Überdeckung von $[a, b]$ mit Intervallen der Länge kleiner δ liefert sofort, dass $d(f(., t), \Omega, p)$ konstant auf $[a, b]$ ist. ∎

Mithilfe dieses Satzes können wir die Ausage von Lemma 1.18 verschärfen.

1.31 Satz. *Seien $f_i : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, stetig und gelte für $p \in \mathbb{R}^n$ und alle $x \in \partial\Omega$:*

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x) - p\| .$$

Dann gilt:

$$d(f_1, \Omega, p) = d(f_2, \Omega, p) .$$

Beweis. Nach Voraussetzung gilt für alle $x \in \partial\Omega$:

$$\|f_1(x) - p\| > 0$$

und

$$\|f_2(x) - p\| \geq -\|f_1(x) - f_2(x)\| + \|f_1(x) - p\| > 0 .$$

Wir setzen $f(x, t) := f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x))$, $0 \leq t \leq 1$. Offensichtlich ist f stetig auf $\overline{\Omega} \times [0, 1]$. Seien $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0, 1]$ so, dass $f(x, t) = p$. Dann gilt nach Voraussetzung:

$$\|f_1(x) - p\| = t\,\|f_1(x) - f_2(x)\| < \|f_1(x) - p\| ,$$

was nicht möglich ist. Also gilt: $f(x, t) \neq p$ für alle $x \in \partial\Omega$ und $t \in [0, 1]$. Die Funktion $f(x, t)$ und der Punkt p erfüllen die Voraussetzungen von Satz 1.30, und somit ist der Abbildungsgrad konstant für alle $t \in [0, 1]$, d.h.

$$d(f(x, t), \Omega, p) = d(f_1(x) + t(f_2(x) - f_1(x)), \Omega, p) = C .$$

Wenn wir $t = 0$ und $t = 1$ einsetzen, erhalten wir

$$d(f_1(x), \Omega, p) = C = d(f_2(x), \Omega, p) .$$

∎

Ein triviales Beispiel für eine Funktion mit nichttrivialen Abbildungsgrad ist $f = \mathrm{id}$, denn es gilt offensichtlich:

$$d(\mathrm{id}, \Omega, p) = \begin{cases} 0 , & \text{falls } p \notin \overline{\Omega} , \\ 1 , & \text{falls } p \in \Omega . \end{cases}$$

Der folgende Satz liefert nichttriviale Beispiele für Funktionen deren Abbildungsgrad nicht identisch Null ist.

1.32 Satz (Borsuk 1933). *Sei Ω eine symmetrische, d.h. aus $x \in \Omega$ folgt $-x \in \Omega$, offene beschränkte Menge im $\mathbb{R}^n$. Sei $0 \in \Omega$ und $f \in C(\overline{\Omega})$ eine ungerade Funktion auf $\partial\Omega$, d.h. für alle $x \in \partial\Omega$ gilt: $f(x) = -f(-x)$. Falls $0 \notin f(\partial\Omega)$, dann ist $d(f, \Omega, 0)$ eine ungerade Zahl.*

Beweis. Der Beweis beruht auf speziellen Konstruktionen zur Fortsetzung von Funktionen (cf. [**?**, S. 24–29]). ∎

Beispiel. $\Omega = (-1, 1)$, $f(x) = x^3$.

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir, wie angekündigt, den Satz von Brouwer auf eine andere Weise als im Kapitel 1 beweisen.

1.33 Satz (Brouwer). *Sei $f : \overline{B}_1(0) \to \overline{B}_1(0)$ eine stetige Funktion. Dann existiert ein Fixpunkt in $\overline{B}_1(0)$, d.h. es existiert ein $x_0 \in \overline{B}_1(0)$ so, dass:*

$$f(x_0) = x_0 \,.$$

Beweis. Nehmen wir an, dass für alle $x \in \overline{B}_1(0)$ gilt: $f(x) \neq x$. Wir definieren $F(x, t) = x - t f(x)$ für $x \in \overline{B}_1(0)$, $0 \le t \le 1$. Unsere Annahme impliziert, dass

$$\begin{aligned}
\|F(x,t)\| = \|x - tf(x)\| \ge \|x\| - t\|f(x)\| &\ge 1 - t \qquad \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1]\,,\\
&> 0 \qquad\quad\ \ \text{für } x \in \partial B_1(0),\ t \in [0,1)\,,
\end{aligned}$$

d.h. $0 \notin F(\partial B_1(0), t)$, $0 \le t < 1$. Für $t = 1$ folgt $\|F(x, 1)\| > 0$ für alle $x \in \partial\Omega$ aufgrund unserer Annahme. Demnach sind die Vorausetzungen von Satz 1.30 für $p = 0$ erfüllt und wir erhalten

$$d(F(\cdot, 0), B_1(0), 0) = d(F(\cdot, 1), B_1(0), 0) \,.$$

Nun ist aber $F(\cdot, 0) = \mathrm{id}$ und damit $d(F(\cdot, 0), B_1(0), 0) = 1$. Nach Satz 1.29 existiert daher ein $x_0 \in B_1(0)$ mit

$$x_0 - f(x_0) = 0 \,.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. Also besitzt f einen Fixpunkt. ∎

Beispiel. Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
2x + y + \sin(x + y) &= 0\\
x - 2y + \cos(x + y) &= 0
\end{aligned} \tag{1.34}$$

besitzt eine Lösung in $B_r(0) \subseteq \mathbb{R}^2$, falls $1 < 5r^2$. Um dies zu zeigen, setzen wir $f, g : [0, 1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f(t, x, y) &:= 2x + y + t \sin(x + y)\,,\\
g(t, x, y) &:= x - 2y + t \cos(x + y)\,.
\end{aligned}$$

Für $t = 0$ besitzt das homogene, lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x - 2y &= 0 \end{aligned}$$

die eindeutige Lösung $(x, y) = (0, 0)$, da die zugehörige Koeffizientenmatrix Rang 2 hat. Somit erhalten wir nach Definition 1.3, dass für alle $r > 0$ und $F(t, x, y) := \big(f(t, x, y), g(t, x, y)\big)$ gilt:

$$d(F(0, \cdot, \cdot), B_r(0), 0) = -1\,. \tag{1.35}$$

Sei nun $(x, y) \in \partial B_r(0)$ und sei $f(t, x, y) = g(t, x, y) = 0$. Dann erhalten wir

$$t^2(\sin^2(x + y) + \cos^2(x + y)) = (-2x - y)^2 + (2y - x)^2$$

und also

$$t^2 = 5r^2\,.$$

Für $r > \frac{1}{\sqrt{5}}$ und $t \in [0, 1]$ ist dies nicht möglich, d.h. $F(t, x, y) \neq 0$ für alle $t \in [0, 1], (x, y) \in \partial B_r(0), r > \frac{1}{\sqrt{5}}$. Satz 1.30 und (1.35) liefern also

$$d(F(1, \cdot, \cdot), B_r(0), 0) = -1\,.$$

Aufgrund von Satz 1.29 besitzt also (1.34) eine Lösung.

4.2 Der Abbildungsgrad von Leray–Schauder

In diesem Abschnitt wollen wir den Begriff des Abbildungsgrades auf unendlich–dimensionale Räume ausweiten. Bei diesem Schritt können jedoch Probleme auftreten. Die Hauptschwierigkeit besteht darin, dass die Einheitskugel in unendlich–dimensionalen Räumen nicht kompakt ist - im Gegensatz zu endlich–dimensionalen Räumen. In Abschnitt 1.2.2 haben wir aus dem Gegenbeispiel von Kakutani bereits gelernt, dass im Allgemeinen eine stetige Funktion auf einem Banachraum keinen Fixpunkt haben muss. Dieses Gegenbeispiel zeigt auch, dass es unmöglich ist, einen Abbildungsgrad für nur stetige Funktionen auf Banachräumen zu definieren, der dieselben Eigenschaften hat wie in endlich–dimensionalen Räumen. Diese Eigenschaften implizieren nämlich die Existenz eines Fixpunktes von stetigen Abbildungen, die die Einheitskugel auf sich selber abbilden.

Die Grundidee bei der Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray–Schauder ist, die betrachteten Operatoren durch Operatoren mit endlich–dimensionalem Wertebereich zu approximieren. Dabei hilft uns Satz 1.2.37. Dieser besagt: