$$\begin{aligned}
&T\colon M \subseteq X \to X \text{ kompakt, } M \text{ beschränkt und abgeschlossen.}\\
&\Longrightarrow \exists\, P_n\colon M \to X \text{ kompakt mit } \dim R(P_n) < \infty \text{ und}\\
&\qquad\qquad \|Tx - P_n x\| \le \frac{1}{n} \quad \forall x \in M\,.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Daher ist es sinnvoll, für kompakte Operatoren einen Abbildungsgrad zu definieren. Im Weiteren werden wir mit den im Beweis von Satz 1.2.37 konstruierten „Schauder"–Operatoren arbeiten.

4.2.1 Abbildungsgrad für endlich–dimensionale Vektorräume

Bisher haben wir einen Abbildungsgrad auf $\mathbb{R}^n$ definiert. Jetzt wollen wir dies auf beliebige endlich–dimensionale normierte Vektorräume verallgemeinern. Sei nun X ein normierter Vektorraum mit $\dim X < \infty$. Dann gibt es ein n und einen isometrischen Isomorphismus $h\colon X \to \mathbb{R}^n$, d.h. h ist eine lineare bijektive Abbildung mit $\|h(x)\|_{\mathbb{R}^n} = \|x\|_X$.

Sei $f\colon \overline{\Omega} \subseteq X \to X$ eine stetige Abbildung, Ω offen und beschränkt, $p \notin f(\partial\Omega)$. Wir definieren den **Abbildungsgrad** der Abbildung f bezüglich Ω und p durch

$$d_X(f, \Omega, p) := d_{\mathbb{R}^n}\big(h \circ f \circ h^{-1}, h(\Omega), h(p)\big)\,. \tag{2.2}$$

2.3 Lemma. *Die Definition* (2.2) *ist unabhängig von der Wahl von h.*

Beweis. Sei $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und o.B.d.A. sei $p = 0$.. Seien $h_i\colon X \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$ isometrische Isomorphismen. Dann ist $h = h_2 \circ h_1^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n$, und insbesondere gilt: $J(h) = 1$. Enthalte das Urbild von $h_1(0)$ unter der Abbildung $h_1 \circ f \circ h_1^{-1}$ nur reguläre Punkte. Dann enthält auch das Urbild von $h_1(h^{-1}(0)) = h_2(0)$ unter der Abbildung $h \circ h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h^{-1} = h_2 \circ f \circ h_2^{-1}$ nur reguläre Punkte. Sei φ eine Funktion mit den Eigenschaften aus Lemma 1.15. Dann gilt aufgrund von Lemma 1.15, des Substitutionssatzes und der Eigenschaften der Isometrie h, insbesondere $J(h) = 1$, $h^{-1} \circ h_1 = h_2$ und $\|h(z)\| = \|z\|$:

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{R}^n}\big(h_1 \circ f \circ h_1^{-1}, h_1(\Omega), h_1(0)\big) &= \int\limits_{h_1(\Omega)} \varphi(\|h_1 \circ f \circ h_1^{-1}(x)\|) J(h_1 \circ f \circ h_1^{-1}(x))\, dx\\
&= \int\limits_{h_2(\Omega)} \varphi(\|h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h^{-1}(y)\|) J(h_1 \circ f \circ h_1^{-1} \circ h^{-1}(y))\, dy\\
&= \int\limits_{h_2(\Omega)} \varphi(\|h_1 \circ f \circ h_2^{-1}(y)\|) J(h_1 \circ f \circ h_2^{-1}(y))\, dy\\
&= \int\limits_{h_2(\Omega)} \varphi(\|h_2 \circ f \circ h_2^{-1}(y)\|) J(h_2 \circ f \circ h_2^{-1}(y))\, dy\\
&= d_{\mathbb{R}^n}\big(h_2 \circ f \circ h_2^{-1}, h_2(\Omega), h_2(0)\big)\,.
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung, mithilfe von Approximationsargumenten, aus der Theorie, die wir in Abschnitt 4.1 entwickelt haben. ∎

2.4 Satz (Reduktion). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $m < n$ und $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$, d.h. der Raum $\mathbb{R}^m$ ist identifiziert mit dem Teilraum des $\mathbb{R}^n$, für dessen Elemente x gilt*

$$x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\,.$$

Sei $f \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^m$ stetig und $g \colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$g(x) = x + f(x), \quad x \in \overline{\Omega}\,.$$

Dann gilt für alle $p \in \mathbb{R}^m$ mit $p \notin g(\partial\Omega)$

$$d_n(g, \Omega, p) = d_m(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}, \Omega \cap \mathbb{R}^m, p)\,.$$

Beweis. Es ist leicht zu sehen, dass $g(\overline{\Omega} \cap \mathbb{R}^m) \subseteq \mathbb{R}^m$ und somit ist die rechte Seite in obiger Formel wohldefiniert. Sei $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und sei p derart, dass $f^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte enthält. Sei nun x aus Ω so, dass $g(x) = x + f(x) = p \in \mathbb{R}^m$. Diese Forderung ist äquivalent zu $x = p - f(x) \in \mathbb{R}^m$, d.h. $x \in \mathbb{R}^m$, und x ist also im Urbild von p bzgl. $g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}$. Somit gilt $g^{-1}(p) = (g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m})^{-1}(p)$. Zu zeigen ist nun, dass $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x))$. Dazu müssen wir die jeweiligen Gradienten berechnen. Es gilt:

$$\nabla g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x) = I_m + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,m},$$

$$\nabla g(x) = \left(\begin{array}{c|c} I_m + \nabla f & (\frac{\partial f_i}{\partial x_k})_{\substack{i=1,\ldots,m \\ k=m+1,\ldots,n}} \\ \hline 0 & I_{n-m} \end{array}\right).$$

Entwicklung nach der „rechten unteren Ecke“ liefert $J(g(x)) = J(g|_{\overline{\Omega}\cap\mathbb{R}^m}(x))$. Somit folgt aus der Definition 1.3 die Behauptung im Falle $f \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ und p derart, dass $f^{-1}(p)$ nur reguläre Punkte enthält. Aus der Theorie des Abschnittes 4.1 folgt daher die Behauptung im allgemeinen Fall. ∎

4.2.2 Konstruktion des Abbildungsgrades von Leray–Schauder

Wir wollen nun einen Abbildungsgrad für *kompakte Pertubationen* der Identität definieren. Sei X ein Banachraum und $\Omega \subseteq X$ eine beschränkte, offene Menge, die die Null enthält, d.h. $0 \in \Omega$. Ferner sei

$$T : \overline{\Omega} \subseteq X \to X$$

ein kompakter Operator und sei

$$0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$$

wobei $I : X \to X$ die Identität ist.

Der Einfachheit halber definieren wir den Abbildungsgrad nur für den Punkt 0. Es ist jedoch kein Problem, den Begriff des Abbildungsgrades auf beliebige Punkte $p \in X$ und $0 \notin \Omega$ zu erweitern.

Zuerst zeigen wir, dass eine positive Zahl $r > 0$ existiert so, dass für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|x - Tx\| \geq r \,. \tag{2.5}$$

Angenommen die Behauptung gilt nicht. Dann gibt es eine Folge $(x_n) \in \partial\Omega$ so, dass

$$\|x_n - Tx_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)\,.$$

Da T kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in X$ und eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet so, dass $Tx_n \to x_0$ $(n \to \infty)$. Damit folgt

$$\|x_n - x_0\| \leq \|x_n - Tx_n\| + \|Tx_n - x_0\|\,.$$

Beide Summanden auf der rechten Seite konvergieren gegen 0 für $n \to \infty$. Also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 = \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx_0\,,$$

auf Grund der Stetigkeit von T. Wir haben gezeigt, dass $x_0 - Tx_0 = 0$ mit $x_0 \in \partial\Omega$, da $\partial\Omega$ eine abgeschlossene Menge ist. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung $0 \notin (I - T)(\partial\Omega)$.

Wir betrachten nun die Schauder Operatoren $P_n : \overline{\Omega} \to X$, die (2.1) erfüllen. Demnach gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|P_n x - Tx\| \leq \frac{r}{2}\,. \tag{2.6}$$

Sei $X_n := R(P_n)$ ein linearer, endlich–dimensionaler Unterraum von X. Dann sieht man sofort, dass $X_n \cap \Omega =: \Omega_n$ eine offene beschränkte Menge in X_n ist, mit $\partial\Omega_n \subseteq \partial\Omega$. Da $(I - P_n)(\Omega_n) \subseteq X_n$ und

$$\inf_{x\in\partial\Omega} \|x - P_n x\| \geq \inf_{x\in\partial\Omega} \Big(\|x - Tx\| - \|Tx - P_n x\|\Big) \overset{(2.5)}{\geq} r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} > 0\,,$$

d.h. $0 \notin (I - P_n)(\partial\Omega)$, können wir $d_{X_n}(I - P_n, \Omega_n, 0)$ wie in (2.2) definieren. Den **Leray–Schauder Abbildungsgrad** von $I - T$ bezüglich Ω und 0 definieren wir nun als

$$d_X(I - T, \Omega, 0) := \lim_{n\to\infty} d_{X_n}(I - P_n, \Omega_n, 0)\,. \tag{2.7}$$

Um diese Definition zu rechtfertigen, müssen wir zeigen, dass der Grenzwert existiert und unabhängig von der Wahl der P_n ist.

Seien dazu P_{n_1} und P_{n_2} zwei Abbildungen so, dass für alle $x \in \overline{\Omega}$, $i = 1, 2$ gilt:

$$\|P_{n_i}x - Tx\| \le \frac{r}{2}\,.$$

Außerdem seien X_{n_i} die zugehörigen linearen, endlich–dimensionalen Unterräume von X, $\dim X_{n_i} < \infty$. X_m sei der kleinste lineare Raum, der X_{n_1} und X_{n_2} enthält. Aus Satz 2.4 folgt

$$d(I - P_{n_i}, \Omega_{n_i}, 0) = d(I - P_{n_i}, \Omega_m, 0)\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{2.8}$$

wobei $\Omega_{n_i} = X_{n_i} \cap \Omega$ und $\Omega_m = X_m \cap \Omega$. Wir betrachten die Homotopie $H\colon \Omega_m \times [0,1] \to X_m$, definiert durch

$$H(x,t) = t(I - P_{n_1})(x) + (1-t)(I - P_{n_2})(x)\,.$$

Für alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned}\|H(x,t) - (I-T)(x)\| &= \|H(x,t) - (t + (1-t))(I-T)(x)\| \\ &\le t\|(I-P_{n_1})(x) - (I-T)(x)\| \\ &\qquad + (1-t)\|(I-P_{n_2})(x) - (I-T)(x)\| \\ &\le t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}\,.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Somit erhalten wir für alle $t \in [0,1]$, $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned}\|H(x,t)\| &\ge \|(I-T)(x)\| - \|H(x,t) - (I-T)(x)\| \\ &\overset{(2.5)}{\ge} r - \frac{r}{2} > 0\,.\end{aligned}$$

Daher folgt nach Satz 1.30 (Homotopieeigenschaft des Abbildungsgrades im X_m), dass $d(H(\cdot,t), \Omega_m, 0)$ auf $[0,1]$ konstant ist, d.h. für alle $t_1, t_2 \in [0,1]$ gilt:

$$d(t_1(I-P_{n_1}) + (1-t_1)(I-P_{n_1}), \Omega_m, 0) = d(t_2(I-P_{n_2}) + (1-t_2)(I-P_{n_2}), \Omega_m, 0).$$

Für $t_1 = 0$ und $t_2 = 1$ erhalten wir insbesondere

$$d(I - P_{n_1}, \Omega_m, 0) = d(I - P_{n_2}, \Omega_m, 0)\,.$$

Dies und (2.8) ergeben also

$$d(I - P_{n_1}, \Omega_{n_1}, 0) = d(I - P_{n_2}, \Omega_{n_2}, 0)\,, \tag{2.10}$$

somit ist die Folge in (2.7) für $n \ge n_0$ konstant, der Grenzwert existiert und ist unabhängig von der Wahl der Leray–Schauder Operatoren P_n.

4.2.3 Eigenschaften des Abbildungsgrades von Leray–Schauder

Jetzt zeigen wir, dass der Abbildungsgrad von Leray–Schauder dieselben Eigenschaften hat wie der Abbildungsgrad von Brouwer.

2.11 Satz. *Falls $d(I-T,\Omega,0) \neq 0$, dann gibt es ein $x_0 \in \Omega$ so, dass*

$$Tx_0 = x_0 .$$

Beweis. Wir wählen Leray–Schauder Operatoren P_n, die (2.1) erfüllen. Für diese gilt nach Konstruktion des Abbildungsgrades (cf. (2.10)) für alle $n \geq n_0$

$$d(I-P_n,\Omega_n,0) \neq 0 .$$

Daher folgt aus Satz 1.29, dass es ein $x_n \in \Omega_n$ gibt mit $P_n x_n = x_n$. Für die Folge (x_n) gilt

$$\begin{aligned} \|x_n - Tx_n\| &\leq \|x_n - P_n x_n\| + \|P_n x_n - Tx_n\| \\ &\leq 0 + \frac{1}{n} . \end{aligned}$$

Da T kompakt ist und die Folge $(x_n) \subset \Omega_n \subseteq \Omega$ beschränkt ist, gibt es eine Teilfolge, wiederum mit (x_n) bezeichnet, und einen Punkt $y \in \overline{\Omega}$ so, dass $Tx_n \to y$ $(n \to \infty)$. Aus obiger Abschätzung folgt, dass $x_n \to y$ $(n \to \infty)$. Da T stetig ist, gilt außerdem $Tx_n \to Ty$ $(n \to \infty)$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes impliziert dies $Ty = y$. Da $0 \notin (I-T)(\partial\Omega)$ ist, gilt also $y \in \overline{\Omega} \setminus \partial\Omega = \Omega$. ■

2.12 Definition. *Für $t \in [0,1]$ seien die Operatoren $T(t)\colon M \subseteq X \to X$ kompakt. Dann ist $T\colon t \mapsto T(t)$ genau dann eine* ***Homotopie****, wenn für alle $\varepsilon > 0$ und alle beschränkten Teilmengen $G \subseteq M$ ein $\delta > 0$ existiert so, dass für alle $t_1,\ t_2$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$, und alle $x \in G$ gilt:*

$$\|T(t_1)(x) - T(t_2)(x)\| \leq \varepsilon .$$

2.13 Satz. *Sei T eine Homotopie auf $\overline{\Omega}$, wobei Ω eine offene und beschränkte Teilmenge von X sei. Sei ferner $T(t)(x) \neq x$ für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \partial\Omega$. Dann hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I-T(t),\Omega,0)$ denselben Wert.*

Beweis. 1. Zuerst zeigen wir, dass eine Zahl $r > 0$ existiert so, dass für alle $t \in [0,1]$ und alle $x \in \partial\Omega$ gilt:

$$\|(I-T(t))(x)\| \geq r .$$

Angenommen dies sei nicht so, dann existieren Folgen $(x_n) \subset \partial\Omega$, $(t_n) \subset [0,1]$ so, dass

$$x_n - T(t_n)(x_n) = y_n , \tag{2.14}$$

mit $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$. Aufgrund von $(x_n) \subset \partial\Omega$, ist die Folge (x_n) beschränkt. Weiterhin folgt aus $(t_n) \subset [0,1]$, die Existenz einer Teilfolge, wiederum mit (t_n) bezeichnet, und eines Punktes $t_0 \in [0,1]$ mit $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$. Da der Operator $T(t_0)$ kompakt ist, folgt auch für eine Teilfolge, wiederum mit (x_n)

bezeichnet, $T(t_0)(x_n) \to y \in X$ $(n \to \infty)$. Dies impliziert zusammen mit Definition 2.12 im Grenzübergang $n \to \infty$

$$\|T(t_n)(x_n) - y\| \leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - y\| \to 0\,.$$

Also gilt $T(t_n)(x_n) \to y$ $(n \to \infty)$. Dies zusammen mit (2.14) und $y_n \to 0$ $(n \to \infty)$ liefert: $x_n \to y \in \partial\Omega$ $(n \to \infty)$. Die Stetigkeit von $T(t_0)$ impliziert dann $T(t_0)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned}\|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(y)\| &\leq \|T(t_n)(x_n) - T(t_0)(x_n)\| + \|T(t_0)(x_n) - T(t_0)(y)\| \\ &\to 0 \qquad (n \to \infty)\,,\end{aligned}$$

d.h. $T(t_n)(x_n) \to T(t_0)(y)$ $(n \to \infty)$. Wenn wir daher in (2.14) den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen, erhalten wir

$$y - T(t_0)(y) = 0\,,$$

wobei $y \in \partial\Omega$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung des Satzes.

2. Wir wählen nun ein $t_1 \in [0,1]$ fest und Schauder Operatoren P_n, die (2.1) erfüllen, d.h. für $n \geq n_0$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$\|P_n(x) - T(t_1)(x)\| \leq \frac{r}{4}\,.$$

Da T eine Homotopie ist, gibt es ein $\delta > 0$ so, dass für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und alle $x \in \overline{\Omega}$ gilt:

$$\|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{4}\,.$$

Daher haben wir für alle t mit $|t - t_1| < \delta$

$$\|P_n(x) - T(t)(x)\| \leq \|P_n(x) - T(t_1)(x)\| + \|T(t_1)(x) - T(t)(x)\| \leq \frac{r}{2}\,,$$

d.h. die Schauder Operatoren P_n erfüllen (2.1) auch für $T(t)$, $t \in (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Die Definition des Abbildungsgrades von Leray–Schauder (2.7) impliziert somit für alle t mit $|t - t_1| < \delta$ und n groß genug

$$d(I - P_n, \Omega_n, 0) = d(I - T(t), \Omega, 0)\,,$$

wobei $\Omega_n = \Omega \cap X_n$ und $X_n = R(P_n)$, d.h. der Abbildungsgrad ist konstant auf dem Intervall $(t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Nun ist $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_1 \in [0,1]} (t_1 - \delta, t_1 + \delta)$. Da $[0,1]$ kompakt ist, gibt es $t_1, \ldots, t_m$ mit $[0,1] \subseteq \bigcup\limits_{t_j=1}^{m} (t_j - \delta, t_j + \delta)$. Also hat für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad $d(I - T(t), \Omega, 0)$ denselben Wert. ■

2.15 Satz (Schauder). *Sei $\Omega \subseteq X$ eine offene, konvexe und beschränkte Teilmenge mit $0 \in \Omega$ und sei $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ kompakt. Dann hat T einen Fixpunkt, d.h. es gibt ein $x_0 \in \Omega$ mit $T(x_0) = x_0$.*

Beweis. Die Menge $\overline{\Omega}$ ist homöomrph zur abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$, d.h. es existiert ein Homöomorphismus $h\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{\Omega}$. Der Operator $h^{-1} \circ T \circ h\colon \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ ist dann offensichtlich kompakt. Die Abbildung

$$H(x,t) = x - t\, h^{-1} \circ T \circ h(x)$$

ist eine Homotopie im Sinne von Definition 2.12. Analog zum Beweis von Satz 1.33 zeigt man, dass für alle $x \in \partial B_1(0)$ und alle $t \in [0,1]$ gilt: $H(x,t) \neq 0$. Satz 2.13 liefert also

$$1 = d(I, B_1(0), 0) = d(I - h^{-1} \circ T \circ h, B_1(0), 0)\,,$$

und somit folgt aus Satz 2.11 die Existenz eines Punktes $y_0 \in B_1(0)$ mit $T \circ h(y_0) = h(y_0)$, d.h. $x_0 = h(y_0)$ ist der gesuchte Fixpunkt von T. ∎

2.16 Satz (Borsuk). *Sei $\Omega \subseteq X$ eine beschränkte, offene und symmetrische Teilmenge mit $0 \in \Omega$ und sei $T\colon \overline{\Omega} \to \overline{\Omega}$ ungerade und kompakt. Ferner sei $T(x) \neq x$ für alle $x \in \partial\Omega$. Dann ist $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade.*

Beweis. Da $\overline{T(\overline{\Omega})}$ kompakt ist, existiert ein endliches ε–Netz $v_1, \ldots, v_p$. Setze $v_{p+1} = -v_1, \ldots, v_{2p} = -v_p$, sowie $v_{2p+1} = v_1, \ldots, v_{3p} = v_p$. Definiere

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx) v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx)}\,,$$

wobei

$$m_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - v_i\| & \text{für } \|x - v_i\| \leq \varepsilon\,,\\ 0 & \text{für } \|x - v_i\| > \varepsilon\,. \end{cases}$$

Es gilt: $\dim R(P_n) < \infty$, $\Omega \cap R(P_n)$ ist symmetrisch und $P_n \rightrightarrows T \ \ (n \to \infty)$ (cf. Beweis von Satz 1.2.37). Außerdem sind die P_n ungerade, denn

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx) v_i}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_i(Tx)} = \frac{-\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x)) v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(-x))}\,, \tag{2.17}$$

denn $v_i = -v_{i+p}$, $i = 1, \ldots, 2p$, $Tx = -T(-x)$, und somit gilt für x mit $\|Tx - v_i\| \leq \varepsilon$

$$\begin{aligned} m_i(Tx) &= \varepsilon - \|Tx - v_i\| = \varepsilon - \|-T(-x) - v_i\| \\ &= \varepsilon - \|T(-x) - v_{i+p}\| = m_{i+p}(T(-x))\,. \end{aligned}$$

Da $v_i = v_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$, gilt auch $m_i = m_{i+2p}$, $i = 1, \ldots, p$, und somit erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2p} m_i(Tx)v_i &= \sum_{i=1}^{p} m_{i+2p}(Tx)v_{i+2p} + \sum_{i=p+1}^{2p} m_i(Tx)v_i \\ &= \sum_{i=p+1}^{2p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p} + \sum_{i=1}^{p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p} \\ &= \sum_{i=1}^{2p} m_{i+p}(Tx)v_{i+p}\,.\end{aligned}$$

Also kann man $P_n(x)$ auch schreiben als

$$P_n(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))v_{i+p}}{\sum\limits_{i=1}^{2p} m_{i+p}(T(x))}\,,$$

und wir erhalten aus (2.17), dass

$$P_n(x) = -P_n(-x)\,.$$

Mit Satz 1.31 folgt, dass $d(I - P_n, \Omega_n, 0)$ ungerade ist. Demnach ist nach Definition des Abbildungsgrades $d(I - T, \Omega, 0)$ ungerade. ■

4.2.4 Quasilineare elliptische Gleichungen III

Diesmal wollen wir quasilineare elliptische Gleichungen in Räumen Hölder–stetiger Funktionen $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ betrachten. Dazu betrachten wir zuerst die *lineare* Gleichung

$$Au = f\,, \tag{2.18}$$

wobei $A : X \to Y$ ein linearer Operator ist und $f \in Y$ ein gegebenes Element. Sei $B : X \to Y$ ein weiterer linearer Operator und sei

$$D_t u := tAu + (1-t)Bu\,, \qquad 0 \le t \le 1\,. \tag{2.19}$$

Anstelle von (2.18) betrachten wir die Schar von Problemen

$$D_t\, u_t = f\,, \qquad 0 \le t \le 1\,, \tag{2.20}$$

und machen folgende Annahme: Es gibt eine Konstante c_0, die unabhängig von $f \in Y$ und $t \in [0,1]$ ist, so, dass für alle Lösungen u von (2.20) für beliebige $f \in Y$ und beliebige $t \in [0,1]$, die apriori Abschätzung

$$\|u\|_X \le c_0\, \|f\|_Y \tag{2.21}$$

gilt.

2.22 Satz. *Seien X, Y Banachräume und seien $A, B : X \to Y$ stetige, lineare Operatoren. Ferner gelte für (2.20) die apriori Abschätzung (2.21) und das Problem (2.20) habe für $t = 0$ und alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung. Dann hat auch das Problem (2.18) für alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung.*

Beweis. 1. Sei $N \subseteq [0,1]$ die Menge der t, für welche das Problem (2.20) für gegebenes t und alle $f \in Y$ eine eindeutige Lösung hat. Offensichtlich ist $0 \in N$ und wir wollen zeigen, dass auch $1 \in N$ ist. Sei $\tau > 0$ derart, dass

$$\tau c_0 \left(\|A\| + \|B\|\right) < 1 . \tag{2.23}$$

Wir werden zeigen, dass dann die Implikation

$$s \in N \qquad \Rightarrow \qquad [s, s+\tau] \subseteq N \tag{2.24}$$

gilt. Da τ unabhängig von s ist, können wir in endlich vielen Schritten von 0 zu 1 kommen, d.h. $1 \in N$.

2. Es bleibt zu zeigen, dass $[s, s+\tau] \subseteq N$ ist, falls $s \in N$ und τ wie in (2.22) gewählt wurde. Das Problem (2.20) für $t = s + \tau\delta\,, \delta \in [0,1]$ läßt sich aufgrund der Definition (2.19) von D_t schreiben als

$$D_s u = f - \delta\tau A u + \delta\tau B u . \tag{2.25}$$

Da $s \in N$ existiert der inverse Operator $D_s^{-1} : Y \to X$, der linear ist und für den aufgrund von (2.21) gilt:

$$\|D_s^{-1}\| \le c_0 .$$

Also ist (2.25) äquivalent zu

$$u = D_s^{-1}(f - \delta\tau A u + \delta\tau B u) =: L u . \tag{2.26}$$

Für $L : X \to X$ gilt:

$$\|Lu - Lv\| \le \delta\tau c_0 \left(\|A\| + \|B\|\right)\|u - v\| ,$$

und somit liefert der Banachsche Fixpunktsatz, dass (2.26) für alle $\delta \in [0,1]$ eine eindeutige Lösung besitzt, d.h. $[s, s+\tau] \subseteq N$. ∎

Wir wollen Satz 2.22 anwenden um zu zeigen, dass das lineare elliptische Problem

$$\begin{aligned} \big(Lu\big)(x) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\partial_i\partial_j u(x) &= f(x) \qquad && \text{in } \Omega\,, \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.27}$$

eine Lösung besitzt.

2.28 Satz (Schauder, 1934). *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}, \alpha \in (0,1)$. Seien ferner $f, a_{ij} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), i,j = 1,\dots,n$ und gelte*

$$\|a_{i,j}\|_{C^{0,\alpha}} \le c_1\,, \qquad i,j = 1,\dots,n\,. \tag{2.29}$$

Der Operator L sei elliptisch, d.h. es existiert ein $\lambda_0 > 0$ so, dass für alle $x \in \overline{\Omega}$ und $\boldsymbol{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \ge \lambda_0 \|\boldsymbol{\zeta}\|^2\,. \tag{2.30}$$

Dann besitzt das Problem (2.27) eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, die der Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.31}$$

genügt.

Der Beweis beruht auf folgenden zwei Beobachtungen:

(i) Für den Laplace Operator gilt die Behauptung des Satzes, d.h. für alle $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ existiert eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad &&\text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 &&\text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.32}$$

die der Abschätzung

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_3(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}} \tag{2.33}$$

genügt. Der Beweis dieser Aussage sprengt den Rahmen des Buches. Man kann ihn in [**?**] oder [**?**] nachlesen.

(ii) Für das Problem (2.27) gelten *Schauder–Abschätzungen*, d.h. falls a_{ij}, $i,j = 1,\dots,n$ die Bedingungen von Satz 2.28 erfüllen und u eine Lösung von (2.27) ist, dann gilt:

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \le c_2(c_1,\lambda_0)\,\|f\|_{C^{0,\alpha}}\,. \tag{2.34}$$

Man beachte, dass die Schauder–Abschätzungen (2.34) keine Aussage über die Existenz von Lösungen enthält. Auch dies kann in [**?**] nachgelesen werden.

Beweis (Satz 2.28). Wir wollen Satz 2.22 anwenden. Dazu setzen wir $X = C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $Y = C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), Bu = -\triangle u$, und $Au = Lu$. Wir müssen also die apriori Abschätzung (2.21) für den Operator D_t definiert in (2.20) herleiten. Dazu benötigen wir die folgende Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen: Seien $g,h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, dann ist auch $g\,h \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Dies folgt sofort aus

$$\begin{aligned} |g(x)\,h(x) - g(y)\,h(y)| &\le \big|g(x)\big(h(x)-h(y)\big) + h(y)\big(g(x)-g(y)\big)\big|\\ &\le c\,|g(x)|\,|x-y|^\alpha + c\,|h(y)|\,|x-y|^\alpha\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von D_t und dieser Eigenschaft erhalten wir für $u \in X$

$$\|D_t u\|_{C^{0,\alpha}} \le c\,\|u\|_{C^{2,\alpha}}\,,$$

d.h. $D_t : X \to Y$ ist stetig und linear für alle $t \in [0,1]$. Die Gleichung

$$D_0 u = f$$

hat nach den Voraussetzungen von Satz 2.28 eine eindeutige Lösung. Da die apriori Abschätzungen (2.33) und (2.34) nur von λ_0 und c_1 abhängen erhalten wir für die Lösungen u von

$$D_t u = f$$

sofort

$$\|u\|_X \le c\,\|f\|_Y\,,$$

wobei c von $t \in [0,1]$ unabhängig ist. Satz 2.22 liefert also, dass

$$D_1 u = f$$

genau eine Lösung in X besitzt. ■

Nun haben wir alle Hilfsmittel zusammen um folgende quasilineare elliptische Gleichung

$$\begin{aligned} Lu(x) &= \varepsilon\, g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,,\\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.35}$$

wobei ε klein genug ist, und $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion ist, zu betrachten.

2.36 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit Rand $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ und sei $g : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine $C^{0,\alpha}$–Funktion. Ferner erfülle der Operator L definiert in (2.27) die Bedingungen (2.29), (2.30). Dann gibt es für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|\varepsilon|$ klein genug eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ des Problems (2.35).*

Beweis. 1. Wir setzen $X = C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$ beliebig. Aufgrund der Eigenschaften Hölder–stetiger Funktionen erhalten wir für alle Funktionen mit

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_4\,, \tag{2.37}$$

dass für $\gamma = \alpha\,\beta$ gilt:

$$\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \le c_5\,, \tag{2.38}$$

wobei die Konstante c_5 nur von c_4 und g abhängt.

2. Aufgrund von Satz 2.28 ist der Operator $L : C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \to C^{\gamma}(\overline{\Omega})$ invertierbar. Wir setzen

$$T(t)u = t\,L^{-1}\big(\varepsilon g(x,u,\nabla u)\big)\,, \tag{2.39}$$

mit $T(t) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \subseteq C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, d.h. der Operator $T(t)$ ordnet jedem $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ die Lösung $v \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ des Problems

$$\begin{aligned} Lv &= t\,\varepsilon\, g(x,u,\nabla u) && \text{in } \Omega\,, \\ v &= 0 && \text{auf } \partial\Omega\,, \end{aligned} \tag{2.40}$$

zu. Satz 2.28 und die kompakte Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow\hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ liefern, dass die Operatoren $T(t), t \in [0,1]$ kompakt sind. Für $t_1, t_2 \in [0,1]$ gilt aufgrund von (2.39), (2.40) und (2.31)

$$\|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_2 \;\le c_2\,|\varepsilon|\,|t_1 - t_2|\,\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}}\,. \tag{2.41}$$

Aufgrund von (2.38) gilt also

$$\|T(t_1)u - T(t_2)u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_2\, c_5\, \varepsilon\, |t_1 - t_2|\,,$$

für beliebige Funktionen u mit $\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_4$. Somit haben wir mithilfe der Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ gezeigt, dass

$$T\colon t \mapsto T(t)\colon C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$$

eine Homotopie ist.

3. Sei $B_r(0)$ die Kugel mit Radius r in $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Für alle $t \in [0,1]$ und $u \in \partial B_{c_4}(0)$ gilt

$$T(t)u \ne u \tag{2.42}$$

falls $|\varepsilon|$ klein genug ist. In der Tat, sei $u \in \partial B_{c_4}(0)$ ein Element mit $T(t)u = u$, dann gilt aufgrund von (2.40), (2.31) und (2.38)

$$\|u\|_{C^{1,\beta}} \le c_6\,\|u\|_{C^{2,\gamma}} \le c_6\, c_2\, t\,|\varepsilon|\,\|g(x,u,\nabla u)\|_{C^{0,\gamma}} \le c_6\, c_2\, c_5\, |\varepsilon|\,,$$

wobei c_6 die Einbettungskonstante von $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ ist. Wir wählen nun $|\varepsilon|$ so klein, dass gilt

$$c_6\, c_2\, c_5\, |\varepsilon| < c_4\,.$$

Wir erhalten einen Widerspruch und somit ist (2.42) bewiesen.

4. Satz 2.13 besagt nun, dass für alle $t \in [0,1]$ der Abbildungsgrad

$$d(I - T(t), B_{c_4}(0), 0)$$

konstant ist. Aufgrund von (2.40) und der eindeutigen Lösbarkeit aus Satz 2.28 ist aber $T(0)$ die triviale Abbildung, d.h. $T(0)u = 0$. Da also

$$d(I - T(0), B_{c_4}(0), 0) = 1$$

gilt, haben wir auch

$$d(I - T(1), B_{c_4}(0), 0) = 1\,,$$

d.h. es existiert eine Lösung $u \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ von (2.35).

5. In Schritt 2. haben wir gezeigt, dass

$$T(1) : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \,,$$

was, aufgrund der Einbettung $C^{2,\gamma}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{1,1}(\overline{\Omega})$, impliziert (cf. (2.37), (2.38))

$$g(x, u, \nabla u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \,.$$

Dies zusammen mit (2.34) liefert

$$u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \,.$$

Somit ist der Satz bewiesen. ■