Abteilung für Angewandte Mathematik 25.06.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 10

Abgabe: Montag, den 2. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei X ein separabler, reflexiver, reeller Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver und hemistetiger Operator. Dann existiert der Operator $A^{-1} : X^* \to X$ und ist strikt monoton und demistetig.

Aufgabe 2: **3 Punkte**

Seien $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ derart, dass $b := \liminf_{n\to\infty} b_n > -\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \le \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei X ein reeller, separabler, reflexiver Banachraum und sei $B : X \times X \to X^*$ ein Operator. Ferner sei $Au := B(u, u)$ für alle $u \in X$.
Der Operator $A : X \to X^*$ heißt semimonoton genau dann, wenn er folgende Bedingungen erfüllt

(a) Für alle $u, v \in X$ gilt: $\langle B(u, u) - B(u, v), u - v\rangle \ge 0$.

(b) Für alle $u \in X$ ist $v \mapsto B(u, v)$ hemistetig und beschränkt von X nach X^*.

(c) Für alle $v \in X$ ist $u \mapsto B(u, v)$ hemistetig und beschränkt von X nach X^*.

(d) Aus $u_n \rightharpoonup u$ in X und $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle \to 0$ folgt
$$B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v) \qquad \text{in } X^* \text{ für alle } v \in X.$$

(e) Sei $v \in X$. Aus $u_n \rightharpoonup u$ in X und $B(u_n, v) \rightharpoonup w$ in X^* folgt
$$\langle B(u_n, v), u_n\rangle \to \langle w, u\rangle.$$

(f) Der Operator A ist beschränkt.

Zeigen Sie, dass jeder semimonotone Operator A pseudomonoton ist.

Tipp: Sei $u_n \in X$ mit $u_n \rightharpoonup u$ und $\limsup_n \langle A(u_n), u_n - u\rangle \le 0$. Definiere $X_n := \langle B(u_n, u_n) - B(u_n, u), u_n - u\rangle$. Zeigen Sie, dass für eine geeignete Teilfolge gilt $\lim_n X_n = 0$. Folgern Sie (für die Teilfolge) $B(u_n, v) \to B(u, v)$ und anschließend $(A(u_n), u_n - u) \to 0$. Betrachten Sie nun $\langle B(u_n, u_n) - B(u_n, w), u_n - w\rangle$ für $w = (1-\theta)u + \theta v$. Zu guter letzt folgern Sie $\liminf_n \langle A(u_n), u_n - v\rangle \ge \langle B(u, u), u - v\rangle$.