Abteilung für Angewandte Mathematik 2.06.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 11

Abgabe: Montag, den 9. Juli, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} -\Delta u + \alpha \sin(u) \sum_{i=1}^{3} \partial_i u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass es ein $\alpha_0 > 0$ gibt so, dass für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| \leq \alpha_0$ und alle $f \in L^2(\Omega)$ das Randwertproblem eine schwache Lösung besitzt.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand und sei $1 < p < \infty$. Untersuchen Sie die folgende Gleichung mit Hilfe der Theorie pseudomonotoner Operatoren auf Lösungen:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(|\nabla \mathbf{u}|^{p-2} \nabla \mathbf{u}\right) + [\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u} + \nabla \pi &= \mathbf{f} \qquad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} \mathbf{u} &= \mathbf{0} \qquad \text{in } \Omega, \end{aligned}$$

mit Randbedingung

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad \text{auf } \partial\Omega.$$

Hierbei ist $\mathbf{f} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ gegeben und $\mathbf{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $\pi : \Omega \to \mathbb{R}$ sind gesucht.

Ziel dieser Aufgabe ist es, dass Sie selbständig nach geeigneten Räumen für $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$ und π suchen, so dass diese Aufgabe lösbar wird. Für die Kompaktheit des Wirbelterms $[\nabla \mathbf{u}]\mathbf{u}$ müssen Sie den Wertebereich von p einschränken.