Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

23.04.2007

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 2

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_ss07/

Abgabe: Montag, den 30. April, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Sei $\eta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine C^1 Funktion. Zeigen Sie:

(a) $L(\mathbf{P}, \mathbf{z}, x) = \eta(\mathbf{z}) \det \mathbf{P}$ mit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ist eine Null–Lagrangefunktion.

(b) Für jede C^1 Funktion $\mathbf{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hängt

$$\int\limits_\Omega \eta(\mathbf{u}) \det(\nabla \mathbf{u})\, dx$$

nur von $\mathbf{u}|_{\partial\Omega}$ ab. Hierbei ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge mit glattem Rand.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Für $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei

$$L(\mathbf{P}) := \operatorname{tr}(\mathbf{P}^2) - \big(\operatorname{tr}(\mathbf{P})\big)^2.$$

Zeigen Sie, dass L eine Null–Lagrangefunktion ist.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Geben Sie die Euler–Lagrange–Gleichungen für das folgende Energiefunktional an:

$$I(w) = \int_\Omega |\nabla w|^p\, dx,$$

wobei $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$.