Abteilung für Angewandte Mathematik 30.04.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 3

http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/fa2_ss07/

Abgabe: Montag, den 7. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **8 Punkte**

Für $-\infty < a < b < \infty$ und $r > 0$ sei

$$Q := \{(x, y, u) \in \mathbb{R}^{2+s} \, : \, x, y \in [a, b] \text{ and } \|u\|_{\mathbb{R}^s} \leq r\}.$$

Sei $X := C([a, b]; \mathbb{R}^s)$ und $M := \{u \in X \, : \, \|u\|_X \leq r\}$. Für eine stetige Funktion $F : Q \to \mathbb{R}^s$ definiere

$$(Au)(x) := \int_a^b F(x, y, u(y))\, dy \qquad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Zeigen Sie, dass $A : M \to X$ kompakt ist.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to X$ eine kontraktive Abbildung, d.h. $d\big(f(x), f(y)\big) < d(x, y)$ für alle $x \neq y$. Sei x_0 aus X so, dass die Folge $x_{n+1} := f(x_n)$ eine konvergente Teilfolge x_{n_k} mit Grenzwert x_∞ besitzt. Zeigen Sie, dass x_∞ der eindeutige Fixpunkt von f ist.
Tipp: Gegenannahme $r := d(x_\infty, f(x_\infty)) > 0$. Sei $F : X \times X \setminus \text{Diagonale} : (x, y) \mapsto \frac{d(f(x), f(y))}{d(x,y)}$. Dann ist $0 \leq F|_U \leq \kappa < 1$ in einer Umgebung U von $(x_\infty, f(x_\infty))$. Folgern Sie daraus den gewünschten Widerspruch.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei $K = [a, b]$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x + 2$ und $T : [a, b] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^2$. Sei M der Graph von φ, d.h. $M := \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [a, b]\}$. Nach Vorlesung existiert nun eine Lösung $u \in [a, b]$ mit

$$(\varphi(x) - Tu)(x - u) \geq 0.$$

Verifizieren Sie dies für $[a, b] = [-3, 0]$, bzw. $[a, b] = [0, 3]$, bzw. $[a, b] = [0.5, 1.5]$ bzw. $[a, b] = [-6, -3]$. Geben Sie die Lösungen konkret an.