Abteilung für Angewandte Mathematik 07.05.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 4

Abgabe: Montag, den 14. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subset X$ eine nicht–leere, kompakte Teilmenge. Ferner sei Y ein Banachraum über $\mathbb{K}$. Zeigen Sie: Eine Familie $\mathcal{F}$ von stetigen Funktionen $f : M \to Y$ ist genau dann relativ kompakt in $C(M; Y)$, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(a) Für jedes $u \in M$ ist $\{f(u) : f \in \mathcal{F}\}$ relativ kompakt in Y,

(b) $\mathcal{F}$ ist gleichgradig stetig, d.h. für alle und alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass für alle $f \in \mathcal{F}$ gilt:

$$u, v \in M,\ d(v, u) < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(v) - f(u)| < \varepsilon.$$

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Sei Ω ein beschränktes glattes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ und $f \in C^0(\mathbb{R})$ mit

$$|f(t)| \leq C\,(1 + |t|)^\alpha$$

für festes $C > 0$ und $0 \leq \alpha < 1$. Zeigen Sie: Das Problem

$$\begin{aligned} -\Delta v = f(v) \qquad & \text{auf } \Omega, \\ v = 0 \qquad & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

besitzt eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int_\Omega \nabla u\, \nabla\varphi\, dx = \int f(u)\, \varphi\, dx.$$

Aufgabe 3: **7 Punkte**

Sei $I = [t_0 - a, t_0 + a]$ mit $a > 0$ und seien $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin genüge $f : I \times \mathbb{R}$ der **Carathéodory Bedingung**:
Für fast alle $t \in I$ ist $x \mapsto f(t, x)$ stetig und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $t \mapsto f(t, x)$ messbar. Ferner existiere ein $h \in L^1(I)$ mit

$$|f(t, x)| \leq h(t) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, es gibt ein δ mit $0 < \delta < a$ so, dass das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) \qquad \text{für fast alle } t \in I_\delta, \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

mit $I_\delta = [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ mindestens eine Lösung $x \in C(I_\delta)$ besitzt.