Abteilung für Angewandte Mathematik 14.05.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 5

Abgabe: Montag, den 21. Mai, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und $S = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a < b$. Ferner seien $f_n, f \in L^1(S; X)$ und $g \in L^1(S)$ mit

$$\|f_n(s)\|_X \leq |g(s)| \qquad \text{für fast alle } s \in S.$$

Zeigen Sie

(a) Aus $f_n(s) \xrightarrow{n} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int\limits_S f_n(s)\,ds \xrightarrow{n} \int\limits_S f(s)\,ds$.

(b) Aus $f_n(s) \overset{n}{\rightharpoonup} f(s)$ für fast alle $s \in S$ folgt $\int\limits_S f_n(s)\,ds \overset{n}{\rightharpoonup} \int\limits_S f(s)\,ds$.

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Sei X ein Banachraum und $1 < p < \infty$. Für $f \in L^p(S; X)$ definieren wir $T(f) \in (L^{p'}(S; X^*))^*$ durch

$$T(f)(g) := \int_S \langle g(s), s(s) \rangle_X \, ds$$

für alle $g \in L^{p'}(S; X^*)$. Zeigen Sie, dass T wohldefiniert ist und für all $f \in L^p(S; X)$ gilt

$$\|f\|_{L^p(S;X)} = \|T(f)\|_{(L^{p'}(S;X^*))^*}.$$

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei X ein reflexiver Banachraum und $1 < p < \infty$ und sei $T(f)$ wie oben definiert. Nach der Vorlesung gilt, dass $T(f)$ surjektiv ist. Damit ist T eine Isometrie von $L^p(S; X)$ nach $(L^{p'}(S; X^*))^*$. Folgern Sie hieraus, dass $L^p(S; X)$ reflexiv ist. Tipp: Benutzen Sie auch die Isometrie von $L^{p'}(S; X^*)$ und $(L^p(S; X^{**}))^*$.