Abteilung für Angewandte Mathematik 21.05.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 6

Abgabe: Montag, den 4. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$ und $a < b$. Zeigen Sie, dass $L^p([a,b];X)$ genau dann separabel ist, wenn X separabel ist.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$. Für $u \in L^p([0,1])$ definieren wir $f : L^p([0,1]) \to L^{p'}([0,1])$ durch $f(u) := |u|^{p-2}u$. Für welche p ist f Gâteaux differenzierbar? Berechnen Sie für diese p die Gâteaux-Ableitung Df. Für welche p ist f Fréchet differenzierbar?

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Zur Erinnerung: **Definition:** Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ heißt gleichmäßig konvex, falls es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass für alle $x, y \in X$ gilt

$$\Big(\|x\| = \|y\| = 1 \quad \text{und} \quad \|x - y\| > \varepsilon\Big) \qquad \Rightarrow \qquad \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1 - \delta.$$

Zeigen Sie, dass folgendes gilt: Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und sei $1 < p < \infty$, so existiert eine nicht fallende Funktion δ_p mit der Eigenschaft $\delta_p(\varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ derart, dass für beliebige $x, y \in X$ mit $\|x\| + \|y\| > 0$ gilt

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq \left(1 - \delta_p\left(\frac{\|x-y\|}{\sup\{\|x\|, \|y\|\}}\right)\right) \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2}.$$

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass $L^p(S;X)$ gleichmäßig konvex ist.
Tipp: Sei $M := \{s : \|u(s) - v(s)\|^p > \frac{1}{4}\varepsilon^p(\|u(t)\|^p + \|v(t)\|^p)\}$. Benutzen Sie Aufgabe 3.