Abteilung für Angewandte Mathematik 04.06.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 7

Abgabe: Montag, den 11. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit glattem Rand. Seien $u, v \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Zeigen Sie, dass $u\,v \in W^{1,p}(\Omega)$ und

$$\partial_i(u\,v) = (\partial_i u)\,v + u\,(\partial_i v)$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

Aufgabe 2: **7 Punkte**

Sei $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ der Abschluss der $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ Funktionen in $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(\mathbb{R}^d) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ für alle $1 \leq p < \infty$.

Aufgabe 3: **8 Punkte**

Sei $\Omega := B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$ und $u(x) := |x|$.

(a) Zeigen Sie, dass $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ und

$$(\partial_i u)(x) = \frac{x_i}{|x|}$$

für all $i = 1, \dots, n$.

(b) Für $n = 1$ ist $\nabla u = u'$ gerade die Signumfunktion. Zeigen Sie, dass u' für $n = 1$ keine schwache Ableitung in L^1_{loc} hat.

(c) Zeigen Sie, dass $\partial_i u$ für $n \geq 2$ und $i = 1, \dots, n$ eine schwache Ableitung in L^1_{loc} hat. Berechnen Sie die Ableitung und überprüfen Sie, für welche $q \in [1, \infty]$ die Funktion $\partial_i u$ in $W^{1,q}(\Omega)$ liegt.