Abteilung für Angewandte Mathematik 11.06.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 8

Abgabe: Montag, den 18. Juni, vor der Vorlesung

Notation: Für einen Ball $B \subset \mathbb{R}^n$ und $f \in L^1(B)$ definieren wir das Mittelwertintegral $\fint_B f(y)\,dy := |B|^{-1} \int_B f(y)\,dy$. Mit $2B$ bezeichnen wir den Ball mit gleichem Zentrum und doppeltem Radius.

Aufgabe 1: **14 Punkte**

Sei $B_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball mit Zentrum x und Radius $r > 0$.

(a) Sei $u \in C^1(\overline{B_r(x)})$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_1 > 0$ gibt, die nur von n abhängt, so, dass

$$\fint_{B_r(x)} |u(y) - u(x)|\,dy \le c_1 \int_{B_r(x)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\,dy.$$

Tipp: $|u(x + s\,\omega) - u(x)| \le \int_0^s |\nabla u(x + t\,\omega)|\,dt$ mit $|\omega| = 1$ und $s > 0$.

(b) Sei $p > n$ und $u \in C^1(\overline{B_r(x)})$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_2 > 0$ gibt, die nur von p und n abhängt, derart, dass

$$\left| u(x) - \fint_{B_r(x)} u(y)\,dy \right| \le c_2\, r^{1-\frac{n}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p(B_r(x))}.$$

(c) Sei $p > n$ und $u \in C^1(\overline{B_{3r}(x)})$ und $p > n$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c_3 > 0$ gibt, welche nur von n und p abhängt, so, dass für alle $y, z \in B_r(x)$

$$|u(y) - u(z)| \le c_3\, |y - z|^{1-\frac{n}{p}}\, \|\nabla u\|_{L^p(B_{3r(x)})}.$$

(d) Sei $p > n$ und $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Ball. Zeigen Sie, dass $W^{1,p}(B) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{n}{p}}(\overline{B})$.
Tipp: Setzen Sie zunächst $u \in W^{1,p}(B)$ auf $2B$ fort.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^n$ Gebiete mit C^1-Rand. Sei $u \in W^{1,\infty}(G_2)$ und sei $f \in C^1(\overline{G_1}; \overline{G_2})$ derart, dass f invertierbar ist mit $f^{-1} \in C^1(\overline{G_1}; \overline{G_2})$. Zeigen Sie, dass $u \circ f \in W^{1,\infty}(G_1)$ und

$$\partial_j (u \circ f) = \sum_{i=1}^n \big((\partial_i u) \circ f \big) \cdot \partial_j f_i.$$