Abteilung für Angewandte Mathematik 18.06.2007
Prof. Dr. M. Růžička, Dr. L. Diening

Funktionalanalysis II

SS 2007 — Woche 9

Abgabe: Montag, den 25. Juni, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Sei $\alpha > -1$. Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c = c(\alpha) > 0$ gilt derart, dass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| > 0$ gilt

$$\frac{1}{c}\big(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\big)^{\alpha} \leq \int_0^1 |(1-\theta)\,\mathbf{a} + \theta\,\mathbf{b}|^{\alpha}\, d\theta \leq c\,\big(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|\big)^{\alpha}.$$

Aufgabe 2: **9 Punkte**

Sei $1 < p < \infty$. Gegeben seien die Funktion $\mathbf{g}, \mathbf{h} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}) := \begin{cases} |\mathbf{a}|^{p-2}\mathbf{a} & \text{für } \mathbf{a} \neq 0, \\ 0 & \text{für } \mathbf{a} = 0, \end{cases}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}) := \begin{cases} (1+|\mathbf{a}|)^{p-2}\mathbf{a} & \text{für } \mathbf{a} \neq 0, \\ 0 & \text{für } \mathbf{a} = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $c = c(p) > 0$ gibt derart, dass für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ mit $|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}| > 0$ gilt

$$\frac{1}{c}\,(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2}\,|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 \leq \big\langle \mathbf{g}(\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}\big\rangle \leq c\,(|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^{p-2}\,|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2.$$

Tipp: Aufgabe 1.

(b) Zeigen Sie: $\mathbf{g}$ ist strikt monoton und für $p = 2$ sogar stark monoton. Für $p \geq 2$ gilt

$$\big\langle \mathbf{g}(\mathbf{a}) - \mathbf{g}(\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}\big\rangle \geq c(p)\,|\mathbf{a} - \mathbf{b}|^p.$$

(c) Übertragen Sie (a) und (b) auf die Funktion $\mathbf{h}$. Dabei muss die Ungleichung in (a) entsprechend modifiziert werden.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Sei X ein reeller, reflexiver, separabler Banachraum. Ein Operator $A : X \to X^*$ heißt *radialstetig*, wenn für alle $u, v \in X$ die Abbildung $t \mapsto \langle A(u+tv), v\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, stetig ist.
Zeigen Sie, dass für einen monotonen Operator $A : X \to X^*$ die Begriffe radialstetig und demistetig äquivalent sind.