Abteilung für Angewandte Mathematik 22.10.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 1

Abgabe: Dienstag, den 29. Oktober, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Sobolevraum **5 Punkte**

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet. Zeigen Sie:

1. Der Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|u\| := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

2. Für $1 < p < \infty$ ist $W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv und separabel. Betrachten Sie hierzu die Abbildung

$$\begin{aligned} T : W^{1,p}(\Omega) &\to (L^p(\Omega))^{n+1} \\ u &\mapsto (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u) \end{aligned}$$

und rekapitulieren Sie, was Sie über Reflexivität und Separabilität wissen.

Aufgabe 2: alternative Charakterisierung **5 Punkte**

Sei $u \in L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. Dann sind äquivalent:

1. $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

2. Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$\left| \int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx \right| \leq c \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)},$$

wobei $p' = \frac{p}{p-1}$ den zu p konjugierten Exponent bezeichne.

Tipp: betrachten Sie die Abbildungen

$$\tilde{F}_i(\varphi) := \int_\Omega u \partial_i \varphi \, dx, \;\; \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$$

und benutzen Sie den Satz von Hahn-Banach. Schlagen Sie außerdem nach, wie die Dualräume der L^p-Räume charakterisiert sind.