Abteilung für Angewandte Mathematik 7.1.2014
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 10
Abgabe: Dienstag, den 14. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Dichheit glatter Funktionen **6 Punkte**

Sei V ein Banachraum, $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall und $1 \leq p < \infty$. Zeigen Sie, dass die Mengen $C^\infty(\bar{I}, V)$ und $C_0^\infty(I, V)$ dicht in $L^p(I, X)$ sind. **Tipp:** Glätten Sie durch Faltung und verwenden Sie Blatt 8.

Aufgabe 2: Partielle Integration **8 Punkte**

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes und beschränktes Intervall, (V, H, V^*) ein Gelfand-Tripel, $1 < p < \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Ferner sei der Raum $W := W^{1,(p,p')}(I, V, V^*)$ der auf Blatt 9 definierte verallgemeinerte Sobolevraum. Sie dürfen für diese Aufgabe ohne Beweis verwenden, dass die Menge $C^\infty(\bar{I}, V)$ dicht im Raum W liegt.

1. Zeigen Sie: Für $u \in C^\infty(\bar{I}, V)$, $u \neq 0$ ist die Funktion $t \mapsto \|u(t)\|_H^2$ klassisch differenzierbar mit
$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_H^2 = 2(u'(t), u(t))_H = 2\langle u'(t), u(t)\rangle_V. \tag{1}$$
2. Folgern Sie aus 1, dass für alle $u \in C^\infty(\bar{I}, V)$ die Abschätzung
$$\|u\|_{C(\bar{I},H)} \leq c\,\|u\|_W$$
mit einer von u unabhängigen Konstante $c > 0$ gilt.
3. Zeigen Sie anschließend die stetige Einbettung
$$W \hookrightarrow C(\bar{I}, H).$$
4. Zeigen Sie: Für alle $u, v \in W$ und alle $s, t \in \bar{I}$ gilt
$$\int_s^t \Big\langle \frac{du}{dt}(\tau), v(\tau)\Big\rangle_V d\tau = (u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H - \int_s^t \Big\langle \frac{dv}{dt}(\tau), u(\tau)\Big\rangle_V d\tau.$$

Aufgabe 3: Schwache Konvergenz **6 Punkte**

1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet und $1 \leq p < \infty$. Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ eine Folge, für die $u_n \rightharpoonup u$ in $L^p(\Omega)$ und $u_n(x) \to v(x)$ fast überall in Ω gilt. Zeigen Sie, dass dann auch $u = v$ gilt.
2. Sei $1 < p < \infty$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^p(\Omega)$. Zeigen Sie: Falls $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast überall in Ω gegen eine Funktion v konvergiert, so gilt auch $u_n \rightharpoonup v$ in $L^p(\Omega)$.