Abteilung für Angewandte Mathematik 14.1.2014
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 11
Abgabe: Dienstag, den 21. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Gronwall-Lemma 6 Punkte

Sei $I = [a,b)$ und $\eta, \psi \in C(I)$.

1. Zeigen Sie: Erfüllt $\varphi \in C^1(I)$ die Ungleichung $\varphi'(t) \leq \psi(t) + \eta(t)\varphi(t)$ für alle $t \in I$, so gilt für alle $t \in I$
$$\varphi(t) \leq \varphi(a)\exp\Big(\int_a^t \eta(s)\,ds\Big) + \int_a^t \exp\Big(\int_s^t \eta(\tau)\,d\tau\Big)\psi(s)\,ds.$$

2. Zeigen Sie: Ist η nicht-negativ und erfüllt $\varphi \in C(I)$ für alle $t \in I$ die Ungleichung $\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \eta(s)\varphi(s)\,ds$, so gilt für alle $t \in I$
$$\varphi(t) \leq \psi(t) + \int_a^t \psi(s)\eta(s)\exp\Big(\int_s^t \eta(\tau)\,d\tau\Big)\,ds.$$

Aufgabe 2: Quasilinearer p-Laplace 7 Punkte

Betrachten Sie die folgende quasilineare parabolische Gleichung:
$$\begin{aligned} \partial_t u - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + su &= f \quad \text{in } I \times \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } I \times \partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \quad \text{in } \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Dabei sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein offenes und beschränktes Gebiet, $\frac{2d}{d+2} < p < d$, $s \in \mathbb{R}$ und $I = (0,T)$ ein endliches Zeitintervall.
Zeigen Sie: Falls $s < 0$ gilt, so hat (1) für alle $f \in L^{p'}(I \times \Omega)$ und $u_0 \in L^2(\Omega)$ mindestens eine schwache Lösung $u \in W$.

Aufgabe 3: Stetige Abhängigkeit von den Daten 7 Punkte

Betrachten Sie das Problem (1) für den Fall $s \geq 0$ und $p \geq 2$. Zeigen Sie, dass der Lösungsoperator $L : L^{p'}(I \times \Omega) \times L^2(\Omega) \to W^{1,(p,p')}(I,V,V^*)$, $(f,u_0) \mapsto u$, wohldefiniert und stetig ist.