Abteilung für Angewandte Mathematik 21.1.2014
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 12
Abgabe: Dienstag, den 28. Januar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Lokale Stetigkeit von d **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene und beschränkte Menge und $\mathbf{f} \in C^1(\overline{\Omega})^d$. Ein Punkt $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ heißt regulärer Wert von $\mathbf{f}$, falls $\mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})$ nur reguläre Punkte enthält. Für reguläre Werte $\mathbf{p}$ sei der Abbildungsgrad definiert durch

$$\mathrm{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = \sum_{x \in \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{p})} \operatorname{sgn} J(\mathbf{f})(x).$$

1. Zeigen Sie: Falls $\mathbf{p}$ ein regulärer Wert von $\mathbf{f}$ ist, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass alle Punkte $\mathbf{p}' \in B_\varepsilon(\mathbf{p})$ ebenfalls reguläre Werte von $\mathbf{f}$ sind.

2. Schließen Sie daraus die lokale Stetigkeit von d in $\mathbf{p}$, das heißt: Sei $\mathbf{p}$ ein regulärer Wert von $\mathbf{f}$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(\mathbf{p}) \cap \mathbf{f}(\partial\Omega) = \emptyset$ gilt. Dann gilt $\mathrm{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = \mathrm{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}')$ für alle $\mathbf{p}' \in B_\varepsilon(\mathbf{p})$.

3. Sei $\mathbf{p}$ ein regulärer Wert von $\mathbf{f}$ und $\mathbf{g} \in C^1(\overline{\Omega})^d$. Zeigen Sie, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass aus $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C^1(\overline{\Omega})^d} < \varepsilon$ folgt, dass $\mathbf{p}$ ein regulärer Wert von $\mathbf{g}$ ist.

4. Schließen Sie daraus die lokale Stetigkeit von d in $\mathbf{f}$, das heißt: Falls $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{2}\operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\partial\Omega))$ so klein ist, dass $\mathbf{p}$ ein regulärer Wert für alle $\mathbf{g}$ mit $\|\mathbf{f} - \mathbf{g}\|_{C^1(\overline{\Omega})^d} < \varepsilon$ ist, so gilt $\mathrm{d}(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = \mathrm{d}(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{p})$ für alle derartigen Funktionen $\mathbf{g}$.

Aufgabe 2: Elementare Eigenschaften **10 Punkte**

Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller Tripel $(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$, wobei Ω eine offene beschränkte Teilmenge des $\mathbb{R}^d$ ist, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ stetig mit $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\partial\Omega)$. Wir nehmen an, es existiere eine Abbildung $B : \mathcal{A} \to \mathbb{Z}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- **Normiertheit**: Für jedes offene und beschränkte $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $\mathbf{p} \in \Omega$ gilt $B(\mathrm{id}, \Omega, \mathbf{p}) = 1$.

- **Additivität**: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$, $\mathbf{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ stetig und Ω_1, Ω_2 jeweils offene, disjunkte Teilmengen von Ω mit $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$. Dann gilt $B(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = B(\mathbf{f}, \Omega_1, \mathbf{p}) + B(\mathbf{f}, \Omega_2, \mathbf{p})$.

- **Homotopieinvarianz**: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\mathbf{p} \in C([0,1], \mathbb{R}^d)$ und $\mathbf{h} \in C([0,1] \times \overline{\Omega}, \mathbb{R}^d)$ mit $\mathbf{p}(t) \notin \mathbf{h}(t, \partial\Omega)$ für alle $t \in [0,1]$. Dann gilt $B(\mathbf{h}(0,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(0)) = B(\mathbf{f}(1,\cdot), \Omega, \mathbf{p}(1))$.

Bitte wenden

Zeigen Sie, dass die Abbildung B dann auch folgende Eigenschaften hat:

1. **Ausschneideeigenschaft**: Für alle offenen Mengen $\Omega_1 \subset \Omega$ und $\mathbf{p} \notin \mathbf{f}(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ gilt $B(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = B(\mathbf{f}, \Omega_1, \mathbf{p})$.

2. **Lösungseigenschaft**: Gilt $B(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) \neq 0$, so besitzt die Gleichung $\mathbf{f}(x) = \mathbf{p}$ mindestens eine Lösung $x_0 \in \Omega$.

3. **Randeigenschaft**: Sei $(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) \in \mathcal{A}$ und $\varepsilon = \operatorname{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{f}(\partial\Omega)) > 0$. Für $\mathbf{g} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^d$ stetig und $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^d$, mit $\|\mathbf{g} - \mathbf{f}\|_{C(\partial\Omega)^d} + |\mathbf{p} - \mathbf{q}| < \varepsilon$ gilt $B(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p}) = B(\mathbf{g}, \Omega, \mathbf{q})$, das heißt insbesondere, dass $B(\mathbf{f}, \Omega, \mathbf{p})$ nur von den Randwerten von $\mathbf{f}$ abhängt.

4. **Komponentenabhängigkeit**: Zeigen Sie, dass $B(\mathbf{f}, \Omega, \cdot)$ konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^d \setminus \mathbf{f}(\partial\Omega)$ ist. Dabei heißt Z Zusammenhangskomponente, falls sich je zwei verschiedene Punkte in Z durch eine stetige Abbildung $w : [0, 1] \to Z$ verbinden lassen.