Abteilung für Angewandte Mathematik 28.1.2014
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 13
Abgabe: Dienstag, den 4. Februar, vor der Vorlesung

Definition: abgeschlossene mengenwertige Abbildung

Seien $M \subset \mathbb{R}^d$ und $N \subset \mathbb{R}^k$ Teilmengen. Eine mengenwertige Abbildung $F : M \to 2^N$ heisst abgeschlossen, falls für je zwei konvergente Folgen $x_k \to x$ in M und $y_k \to y$ in N mit $y_k \in F(x_k)$ gilt $y \in F(x)$.

Aufgabe 1: Fixpunktsatz von Kakutani 10 Punkte

Sei $K \subset \mathbb{R}^d$ nichtleer, kompakt und konvex. Ferner sei $F : K \to 2^K$ abgeschlossen und für alle $x \in K$ sei $F(x) \subset K$ konvex. Zeigen Sie: F hat einen Fixpunkt, das heisst es existiert ein $\eta \in K$ mit $\eta \in F(\eta)$.
Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Zunächst existiert für alle $\varepsilon > 0$ eine Auswahlfunktion $f_\varepsilon : K \to K$, $f_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) y_i$ und $f_\varepsilon(x) \in B_\varepsilon(F(x))$. Hierbei ist die Familie $(\varphi_i)_{i=1,\dots,n}$ eine der Überdeckung $K \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i)$ untergeordnete stetige Zerlegung der Eins, $y_i \in F(x_i)$ und ferner $B_\varepsilon(F(x)) := \{\, y \in K \,|\, \operatorname{dist}(y, F(x)) \le \varepsilon \,\}$ eine ε-Umgebung der Menge $F(x)$. Die Existenz einer derartigen Funktion dürfen Sie ohne Beweis verwenden. Zeigen Sie dann, dass jedes f_ε einen Fixpunkt η_ε besitzt und, dass η_ε für eine Teilfolge gegen ein $\eta \in K$ konvergiert. Zeigen Sie nun, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für festes $\rho > 0$ und alle $x \in K$ mit $|x - \eta| < \delta$ gilt $F(x) \subset B_\rho(F(\eta))$. Folgern Sie dann, dass für alle $\varepsilon < \delta$ und alle $x \in K$ mit $|x - \eta| < \delta - \varepsilon$ auch $f_\varepsilon(x) \in B_\rho(F(\eta))$ gilt. Schliessen Sie aus den letzten beiden Zwischenbehauptungen nun $\eta \in F(\eta)$ indem Sie zuerst ε und danach ρ gegen Null gehen lassen.

Aufgabe 2: Existenz periodischer Lösungen 6 Punkte

Sei $0 < T < \infty$ und sei $f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, das einer gleichmässigen Lipschitzbedingung bezüglich der zweiten Variablen genügt und T-periodisch bezüglich der ersten Variablen sei. Ausserdem erfülle f die folgende Invarianzbedingung:

$$\exists R > 0 \text{ mit } (x, f(t,x)) \le 0 \text{ für alle } t \in [0,T] \text{ und alle } \|x\| \ge R.$$

Zeigen Sie, dass eine periodische Lösung der Gleichung

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad t \in (0,T]$$

existiert, das heisst eine Lösung der Differentialgleichung mit $u(T) = u(0)$.
Tipp: Untersuchen Sie die sogenannte Zeit-T Abbildung $P(\eta) := v(T;\eta)$, wobei η ein Anfangswert und v eine zugehörige Lösung der Gleichung ist.

bitte Wenden

Aufgabe 3: Nicht-zulässige Homotopie **4 Punkte**

Für $x = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \overline{B_1(0)}$ und $t \in [0,1]$ sei

$$h(t,x) := \begin{cases} (r,0) & \text{falls } t = 0 \\ (r\cos\frac{\varphi}{t}, r\sin\frac{\varphi}{t}) & \text{falls } 0 < t \leq 1,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi t \\ (r,0) & \text{falls } 0 < t \leq 1,\ 2\pi t < \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Gilt dann $h(t,\cdot) \in C(\overline{B_1(0)})$ für alle $t \in [0,1]$ und $h(\cdot,x) \in C([0,1])$ für alle $x \in \overline{B_1(0)}$? Berechnen Sie anschließend $d(h(0,\cdot), B_1(0), 0)$ und $d(h(1,\cdot), B_1(0), 0)$.