Abteilung für Angewandte Mathematik 4.2.2014
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 14
Abgabe: Dienstag, den 11. Februar, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Subdifferential und Konjugierte 5 Punkte

Sei X ein Banachraum mit Dualraum X^* und $f : X \to [-\infty, \infty]$ eine konvexe Funktion mit $\operatorname{dom}(f) := \{ x \in X \,|\, f(x) < \infty \} \neq \emptyset$. Wie in FA1 sei die Konjugierte $f^* : X^* \to [-\infty, \infty]$ durch $f^*(x^*) := \sup_{x\in X}(\langle x^*, x\rangle - f(x))$ definiert. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für alle $x \in \operatorname{dom}(f)$ und alle $x^* \in X^*$ gilt
$$\langle x^*, x\rangle \leq f^*(x^*) + f(x) \text{ (Young'sche Ungleichung) },$$
$$\langle x^*, x\rangle = f^*(x^*) + f(x) \Leftrightarrow x^* \in \partial f(x),$$
wobei $\partial f(\cdot)$ den Subgradienten von f bezeichnet.
2. Es gilt: $f(x) = \min_{y\in X} f(y) \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) \Leftrightarrow f(x) = -f^*(0)$, das heißt $-f^*(0)$ ist ein globales Minimum von f.
3. Es gilt: Aus $x \in \operatorname{dom}(f), x^* \in \partial f(x)$ folgt immer $x^* \in \operatorname{dom}(f^*)$ und $x \in \partial f^*(x^*)$ und falls X reflexiv und f unterhalbstetig ist gilt auch die Umkehrung. **Tipp:** Falls f konvex und unterhalbstetig ist gilt $f = f^{**}$.

Aufgabe 2: Yosida-Approximation 5+5 Bonuspunkte

Sei H ein Hilbertraum und $A : H \to 2^H$ eine monotone (mengenwertige) Abbildung.

1. Zeigen Sie: A ist monoton genau dann wenn für alle $\lambda > 0$ und für alle $(x, p), (y, q) \in G(A)$ gilt
$$\|x - y\| \leq \|x - y + \lambda(p - q)\|.$$
2. Sei nun $\lambda > 0$ und $J_\lambda := (\mathrm{id} + \lambda A)^{-1}$ und $A_\lambda := \frac{1}{\lambda}(\mathrm{id} - J_\lambda)$. Zeigen Sie: J_λ und A_λ sind (eindeutige) Abbildungen von $\mathrm{R}(\mathrm{id} + \lambda A)$ nach H und es gilt $A_\lambda(x) \in A(J_\lambda(x))$. Die Abbildung A_λ wird als Yosida-Approximation von A bezeichnet.
3. Zeigen Sie, dass die Yosida-Approximation monoton ist.
4. Sei nun $(\mathrm{id} + \lambda A)$ für alle $\lambda > 0$ surjektiv, das heißt für alle $\lambda > 0$ und für alle $y \in H$ existiert ein $x \in H$ mit $y \in x + \lambda A(x)$. Zeigen Sie, dass A dann maximal monoton ist, das heißt aus $\langle u - v, x - y\rangle \geq 0$ für alle $(y, v) \in G(A)$ folgt $u \in A(x)$.
5. Zeigen Sie: Falls $(\mathrm{id} + \lambda A)$ für alle $\lambda > 0$ surjektiv ist, so ist $A(x)$ für alle $x \in H$ abgeschlossen und konvex und A ist abgeschlossen im Sinne der Definition auf Blatt 12.

Teil 1-3 von Aufgabe 2 geben 5 Punkte, Teil 4 und 5 noch einmal 5 Bonuspunkte. Das Blatt geht mit 10 Punkten in die 50%-Wertung ein.