Abteilung für Angewandte Mathematik 29.10.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 2
Abgabe: Dienstag, den 5. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Zarantonello 7 Punkte

Sei H ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$. Es sei $A : H \to H^*$ stark monoton, das heisst, es existiert $c > 0$ mit

$$\langle Au - Av, u - v\rangle_H \geq c \,\|u - v\|_H^2,\ u, v \in H,$$

und Lipschitz-stetig, d.h. $\|Au - Av\|_{H^*} \leq L\,\|u - v\|_H$, für alle $u, v \in H$. Sei außerdem $j : H^* \to H$ die Riesz'sche Abbildung, definiert durch $(jf, u)_H = \langle f, u\rangle_H$ für $f \in H^*, u \in H$. Zeigen Sie mit Hilfe der Abbildung $F_\varepsilon : H \to H$, $F_\varepsilon(u) := u + j(\varepsilon f - \varepsilon Au)$, dass $A : H \to H^*$ bijektiv ist.

Definition
Sei $F : M \subseteq X \to Y$ ein Operator, wobei X, Y normierte Vektorräume sind. Der Operator F heisst **kompakt**, wenn gilt: F ist stetig und F bildet beschränkte Mengen $B \subset M$ auf relativ kompakte Mengen ab, d.h. $\overline{F(B)}$ ist kompakt.

Aufgabe 2: kompakter Integraloperator 8 Punkte

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C(I \times I \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in C(I, I)$. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Arzelà-Ascoli, dass der Operator

$$\begin{aligned} F : C(I, \mathbb{R}^n) &\to C(I, \mathbb{R}^n) \\ u(\cdot) &\mapsto Fu(\cdot) := \int_a^{\varphi(\cdot)} f(\cdot, s, u(s))\, ds \end{aligned}$$

unter diesen Voraussetzungen kompakt ist.

Aufgabe 3: stetige Funktionen 5 Punkte

Sei S ein kompakter metrischer Raum und Y ein Banachraum. Zeigen Sie, dass der Raum

$$C^0(S, Y) := \big\{\, u : S \to Y \,|\, u \text{ ist stetig auf } S \,\big\}$$

mit der Norm $\|u\|_{C^0(S,Y)} := \sup_{s\in S} \|u(s)\|_Y$ ein Banachraum ist.