Abteilung für Angewandte Mathematik 12.11.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 4

Abgabe: Dienstag, den 19. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: 4 Punkte

Seien X und Y normierte Vektorräume und $A : M \subseteq X \to Y$ eine Operator. Zeigen Sie: Falls $\dim X < \infty$, M abgeschlossen und A stetig ist, so ist A kompakt.

Aufgabe 2 8 Punkte

Ein Operator $T : X \to Y$ heißt **vollstetig** falls aus $x_n \rightharpoonup x$ in X folgt $Tx_n \to Tx$ in Y. Zeigen Sie: Ist X ein reflexiver Banachraum und Y ein Banachraum so ist ein linearer Operator T genau dann kompakt, wenn er vollstetig ist. **Tipp:** Für lineare, stetige Operatoren T gilt: $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$. Benutzen Sie außerdem den Satz von Eberlein-Šmuljan

Aufgabe 3: elliptische, nicht-lineare Gleichung 8 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und sei $A \in L^\infty(\Omega)^{n\times n}$ α-elliptisch, das heißt es gelte $\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\lambda_i\lambda_j \geq \alpha|\lambda|^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei außerdem eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die der Wachstumsbedingung $|f(x)| \leq c\,(1 + |x|^\delta)$ für $\delta \in [0, 1)$ genüge. Ferner bezeichne c_P die Poincaré-Konstante des Gebiets Ω, das heißt die kleinste Konstante, so dass $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c_P \,\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ für alle $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ gilt. Beweisen Sie die Existenz einer schwachen Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\mathrm{div}\,(A\nabla u) &= f(u) \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit Hilfe des Schauder'schen Fixpunktsatzes.

Tipp: Verwenden Sie Lax-Milgram für das linearisierte Problem und orientieren Sie sich am Beispiel aus der Vorlesung.