Abteilung für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

19.11.2013

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 5

Abgabe: Dienstag, den 26. November, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Separabilität von Bochnerräumen **5 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$, X ein Banachraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie, dass $L^p(I, X)$ genau dann separabel ist, wenn X separabel ist.

Aufgabe 2: Reflexivität von Bochnerräumen **8 Punkte**

Ziel der Aufgabe ist zu zeigen, dass die kanonische Isometrie $J : L^p(I, X) \to (L^p(I, X))^{**}$, $1 < p < \infty$, surjektiv ist, falls X reflexiv ist. Laut Vorlesung wissen Sie bereits, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} &T_{p,X} : L^{p'}(I, X^*) \to (L^p(I, X))^* \\ &\langle T_{p,X}\, u, \varphi\rangle := \int_I \langle u(t), \varphi(t)\rangle_X \, dt, \quad \varphi \in L^p(I, X), \end{aligned}$$

ein isometrischer Isomorphismus ist. Gehen Sie nun wie folgt vor:

1. Zeigen Sie, dass
$$T_{p',X^*} : L^{(p')'}(I, (X^*)^*) \to (L^{p'}(I, X^*))^*$$
ebenfalls ein isometrischer Isomorphismus ist.

2. Zeigen Sie, dass sich die kanonische Isometrie $j_X : X \to X^{**}$ zu einer surjektiven Isometrie $j_X : L^p(I, X) \to L^p(I, X^{**})$ fortsetzen lässt.

3. Zeigen Sie, dass der zu T^{-1} adjungierte Operator
$$(T^{-1})^t : (L^{p'}(I, X^*))^* \to (L^p(I, X))^{**}$$
ein isometrischer Isomorphismus ist. Dabei ist der zu $A \in L(U, V)$ adjungierte Operator $A^t \in L(V^*, U^*)$ gegeben durch $\langle A^t f, x\rangle_U = \langle f, Ax\rangle_V$, $x \in U, f \in V^*$.

4. Zeigen Sie schließlich, dass das Diagramm
$$\begin{tikzcd} L^p(I,X) \arrow[d, "j_X"'] \arrow[dr, "J"] & \\ L^p(I,X^{**}) \arrow[d, "T_{p',X^*}"'] & (L^p(I,X))^{**} \\ (L^{p'}(I,X^*))^* \arrow[ur, "(T^{-1})^t"'] & \end{tikzcd}$$
kommutiert.

Bitte wenden

Aufgabe 3 : Wirbelterm **7 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet und $X := W_0^{1,2}(\Omega)^3$. Der Wirbelterm $b_u : X^2 \to \mathbb{R}$ ist für festes $u \in X$ definiert durch

$$b_u(v, w) := \sum_{i,j=1}^{3} \int_{\Omega} u_i \partial_i v_j w_j \, dx.$$

Zeigen Sie, dass b_u wohldefiniert und sogar in jedem Punkt Fréchet-differenzierbar ist.