Abteilung für Angewandte Mathematik 26.11.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 6
Abgabe: Dienstag, den 3. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Implizite Funktionen 7 Punkte

Für festes $T \in (0, \pi)$ definieren wir die mit ihren Standardnormen versehenen Räume $X = Z = C^0([0,T])$ und $Y = \{\, u \in C^1([0,T]) \,|\, u(0) = 0 \,\}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, so dass das Problem

$$\begin{aligned} u' - u^2 - 1 &= f \quad \text{in } (0,T) \\ u(0) &= 0 \end{aligned}$$

für jedes $f \in B_\varepsilon(0) \subset X$ genau eine Lösung $u = G(f) \in Y$ besitzt. Zeigen sie außerdem $G \in C^1(B_\varepsilon(0), Y)$ und bestimmen Sie $G'(0)$.
Tipp: Die folgende Formel ist nützlich für das linearisierte Problem:

$$\varphi(t) = e^{-P(t)} \int_0^t e^{P(s)} \eta(s)\, ds$$

Aufgabe 2: Dualraum von $W_0^{1,p}(\Omega)$ 6 Punkte

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes und beschränktes Gebiet, $1 < p < \infty$ und p' der konjugierte Exponent. Betrachten Sie den Sobolevraum $W_0^{1,p}(\Omega)$ mit der Norm $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} := \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ und beweisen Sie: es gilt $F \in (W_0^{1,p}(\Omega))^*$ genau dann, wenn Funktionen $f_i \in L^{p'}(\Omega)$, $i = 0, ..., n$, existieren, so dass für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\langle F, u \rangle_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega f_0 u\, dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega f_i \partial_i u\, dx.$$

Tipp: Benutzen Sie den kanonisch normierten Raum $E := (L^p(\Omega))^{1+n}$ und die Abbildung $\Pi : W_0^{1,p}(\Omega) \to E$, $u \mapsto (u, \partial_1 u, ..., \partial_n u)$.

Aufgabe 3 : Monotonie 7 Punkte

Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die gegeben ist durch

$$g(u) = \begin{cases} |u|^{p-2} u & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Für $p > 1$ ist g strikt monoton.
2. Für $p \geq 2$ gilt $\langle g(u) - g(v), u - v \rangle \geq c\, |u - v|^p$.
3. Für $p = 2$ ist g stark monoton.

Tipp: Benutzen Sie die Funktion $h(u, v) := g'(u) v^2$ und für den Fall $p \geq 2$ die Identität

$$\langle g(u) - g(v), u - v \rangle = \frac{|u|^{p-2} + |v|^{p-2}}{2} |u - v|^2 + \frac{|u|^{p-2} - |v|^{p-2}}{2} (|u|^2 - |v|^2).$$