Abteilung für Angewandte Mathematik 3.12.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 7
Abgabe: Dienstag, den 10. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Folgerung aus Browder-Minty **6 Punkte**

Sei X ein separabler, reflexiver Banachraum und sei $A : X \to X^*$ ein strikt monotoner, koerziver, hemistetiger Operator. Zeigen Sie, dass dann der Operator $A^{-1} : X^* \to X$ existiert und außerdem strikt monoton und demistetig ist.

Aufgabe 2: radialstetiger Operator **7 Punkte**

Sei X ein reeller, separabler und reflexiver Banachraum. Man nennt einen Operator $A : X \to X^*$ **radialstetig** falls die Abbildung $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $F(t) := \langle A(u + tv), v\rangle$, für alle $u, v \in X$ stetig ist. Zeigen Sie, dass für einen monotonen Operator $A : X \to X^*$ die Begriffe radialstetig, demistetig und hemistetig äquivalent sind.

Aufgabe 3: Bedingung (M) **7 Punkte**

Sei X ein reflexiver und separabler Banachraum und $A : X \to X^*$ sei definiert durch $Au := B(u, u)$, wobei $B : X \times X \to X^*$ den folgenden Bedingungen genüge:

1. $B(u, \cdot)$ ist monoton und hemistetig für festes $u \in X$.
2. $B(\cdot, v)$ ist für festes $v \in X$ schwach stetig, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $B(u_n, v) \rightharpoonup B(u, v)$ in X^*.
3. Die Funktion $u \mapsto \langle B(u, v), u\rangle$ ist für festes $v \in X$ schwach unterhalbstetig, d.h. $u_n \rightharpoonup u$ in X impliziert $\langle B(u, v), u\rangle \le \liminf_{n\to\infty}\langle B(u_n, v), u_n\rangle$.

Zeigen Sie, dass dann A die Bedingung (M) erfüllt.