Abteilung für Angewandte Mathematik 10.12.2013
Prof. Dr. M. Růžička, Philipp Nägele

Nichtlineare Funktionalanalysis

WS 2013/14 — Woche 8
Abgabe: Dienstag, den 17. Dezember, vor der Vorlesung

Aufgabe 1: Vektorwertige Distributionen **10 Punkte**

Sei $1 \leq p < \infty$, $I := (a, b) \subset \mathbb{R}$ und X ein Banachraum.

1. Zeigen Sie: Für $u \in L^p(I, X)$ gilt auch $u_h \in L^p(I, X)$, wobei
$$u_h(t) = \begin{cases} u(t+h) & \text{für } t+h \in I \\ 0 & \text{für } t+h \notin I. \end{cases}$$
Zeigen Sie außerdem $\lim_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L^p(I,X)} = 0$.

2. Zeigen Sie: Für $u \in L^p(I, X)$ ist die durch $v(t) := \int_{t_0}^t u(s)\, ds$, $t_0 \in I$, definierte Funktion $v : I \to X$ fast überall in I differenzierbar mit $v'(t) = u(t)$.

3. Wir versehen den Raum $C_0^\infty(I)$ mit dem folgenden Konvergenzbegriff: eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(I)$ konvergiert gegen φ in $C_0^\infty(I)$ falls eine kompakte Menge $K \subset I$ existiert, so dass $\operatorname{supp}(\varphi_n), \operatorname{supp}(\varphi) \subset K$ für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n^{(\alpha)} - \varphi^{(\alpha)}\|_{C^0(K)} = 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}$ gilt. Sei außerdem $\mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$ der Raum der stetigen linearen Abbildungen von $C_0^\infty(I)$ nach X. Die Konvergenz in $\mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$ definieren wir durch $T_n \to T :\Leftrightarrow \langle T_n, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(I)$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $T : L^p(I, X) \to \mathcal{L}(C_0^\infty(I), X)$, mit
$$\langle Tu, \varphi \rangle := \int_I u(s) \varphi(s)\, ds$$
wohldefiniert, linear, stetig und injektiv ist.

Aufgabe 2: inhomogene Randwerte **5 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $1 < p < \infty$. Zeigen Sie, dass es für $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $g \in W^{1,p}(\Omega)$ eine eindeutige schwache Lösung des Problems
$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= f \text{ in } \Omega \\ u &= g \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$
gibt. **Tipp:** Transformieren Sie die Gleichung auf homogene Randwerte und betrachten sie den geshifteten Operator $A_g(\cdot) := A(\cdot + g)$.

Aufgabe 3: (schwach singulärer Integralkern) **5 Punkte**

Sei Ω ein beschränktes Gebiet und $\alpha \in [0, n)$. Weiterhin sei $A \in L^\infty(\Omega \times \Omega)$. Für $x \in \Omega$ und $f \in L^2(\Omega)$ definieren wir

$$(Tf)(x) := \int_\Omega \frac{A(x,y)}{|x-y|^\alpha} f(y)\, dy.$$

Zeigen Sie, dass T ein (wohldefinierter) stetiger, linearer Operator von $L^2(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ ist, das heißt insbesondere dass gilt $\|Tf\|_{L^2(\Omega)} \leq C \, \|f\|_{L^2(\Omega)}$.