Michael Růžička

Kurzskript: Sobolev Räume

1.1 Sobolev Räume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $1 \leq p \leq \infty$. Dann definieren wir die **Lebesgueräume**[1]

$$L^p(\Omega) := \{f \in M(\Omega) \,\big|\, \|f\| < \infty\},$$

wobei $\|f\|_p$ die übliche Norm ist und $M(\Omega)$ der Raum der lebesgue-messbaren Funktionen ist. Der Raum der **lokalintegrierbaren Funktionen** ist definiert durch

$$L^1_{loc} := \{f \in M(\Omega) \,\big|\, f \in L^1(K), \forall\, K \subseteq\subseteq \Omega\}\,. \tag{1.1}$$

1.2 Definition. *Sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Die Funktionen $g^i \in L^1_{loc}(\Omega)$, $i = 1, \dots, n$ heißen **schwache partielle Ableitungen** in Richtung x_i von f, falls für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:*

$$\int\limits_\Omega \partial_i \varphi \, dx = - \int\limits_\Omega g^i \varphi \, dx\,. \tag{1.3}$$

- Die schwache Ableitung ist eindeutig.
- Wir bezeichnen die schwache Ableitung durch

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i} := g^i \tag{1.4}$$

und den **schwachen Gradienten** durch

$$\nabla f := (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$$

- Es handelt sich hierbei um einen Spezialfall der distributionellen Ableitung.

1.5 Definition. *Sei $1 \leq p \leq \infty$. Die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gehört zum **Sobolevraum** $W^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn $f \in L^p(\Omega)$ und die schwachen Ableitungen $\partial_i f$, $i = 1, \dots, n$ auch zum Raum $L^p(\Omega)$ gehören.*

- Als Norm auf $W^{1,p}$ definieren wir

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,p} &:= \Big(\|u\|_p^p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p^p\Big)^{\frac{1}{p}}\,, \qquad 1 \leq p < \infty\,, \\ \|u\|_{1,\infty} &:= \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} \big(|u| + |\nabla u|\big) \end{aligned} \tag{1.6}$$

oder

$$|||u|||_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^n \|\partial_i u\|_p. \tag{1.7}$$

[1] Man beachte, dass die Lebesgueräume eigentlich aus Klassen von Funktionen bzgl. der Äquivalenzrelation „fast überall gleich“ bestehen. Wir werden aber nicht zwischen einer Funktion und ihrer Äquivalenzklasse unterscheiden.

(1.6) und (1.7) sind äquivalente Normen.
• Für $p = 2$ definieren wir ein Skalarprodukt auf $W^{1,2}(\Omega)$:

$$(f, g)_{W^{1,2}} := (f, g)_{L^2} + \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f, \partial_i g)_{L^2} \tag{1.8}$$

Die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm ist gerade die Norm in (1.6).

Beispiele: (i) Die Funktion

$$f(x) = |x|$$

ist für $\Omega = \mathbb{R}$ im Nullpunkt nicht differenzierbar. Allerdings gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |x|\varphi' \, dx &= \int_{-\infty}^{0} -x\varphi' \, dx + \int_{0}^{\infty} x\varphi' \, dx \\
&= -x\varphi \,\Big|_{-\infty}^{0} + \int_{-\infty}^{0} \varphi \, dx + x\varphi \,\Big|_{0}^{\infty} - \int_{0}^{\infty} \varphi \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi(x) \, dx,
\end{aligned}$$

d.h. $f' = \operatorname{sgn}$ im schwachen Sinne.

(ii) Betrachte $u(x) = |x|^{-\beta}$, $\beta > 0$ auf $\Omega = B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Als punktweise Ableitungen erhält man für $x \neq 0$

$$\partial_i u = -\beta |x|^{-\beta-1} \frac{x_i}{|x|},$$

und somit

$$|\nabla u(x)| = \beta |x|^{-\beta-1}.$$

Also folgt mit der Zwiebelformel

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx = \omega_n \beta^p \int_{0}^{1} r^{n-1} r^{(-\beta-1)p} \, dr = c(p,n) r^{n-(\beta+1)p} < \infty,$$

falls $\beta < \frac{n-p}{p}$. Als schwache Ableitung erhält man

$$\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} u \partial_i \varphi \, dx = -\int_{\Omega \setminus B_\varepsilon(0)} \partial_i u \varphi \, dx + \int_{\partial B_\varepsilon(0)} u \varphi \nu_i \, ds.$$

Für das Randintegral ergibt sich

$$\Big| \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} u\varphi\nu_i \, ds \Big| \le \|\varphi\|_\infty \int\limits_{\partial B_\varepsilon(0)} \varepsilon^{-\beta} \, ds = c\varepsilon^{-\beta}\varepsilon^{n-1} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0),$$

falls $\beta < n-1$, aber dies ist schon erfüllt für $\beta < \frac{n-p}{p}$. Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz liefert für $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_\Omega u\partial_i\varphi \, dx = -\int\limits_\Omega \partial_i u\varphi \, dx,$$

d.h. die punktweisen Ableitungen sind schwache Ableitungen und es gilt

$$u \in W^{1,p}(B_1(0)) \qquad \Leftrightarrow \qquad \beta < \frac{n-p}{p}.$$

(iii) Betrachte $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. Punktweise ist für $x \neq 0$

$$(sgn(x))' = 0.$$

Die schwache Ableitung existiert nicht im Sinne von Definition 1.2. Im distributionellen Sinne ist $f' = 2\delta_0$, wobei δ_0 das Dirac-Maß bezeichnet:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{sgn}(x)\varphi'(x) \, dx = 2\varphi(0).$$

1.9 Satz. *Der Sobolevraum $W^{1,p}(\Omega)$, versehen mit der Norm (1.6), ist ein Banachraum. Er ist reflexiv, wenn $1 < p < \infty$ und separabel, falls $1 \le p < \infty$.*

Beweis. (1) Banachraum: Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann sind (f_n) und (∇f_n) jeweils Cauchyfolgen in $L^p(\Omega)$. Da $L^p(\Omega)$ vollständig ist, konvergiert (f_n) gegen eine Funktion f in $L^p(\Omega)$ und

$$\partial_i f_n \to g^i \qquad \text{in } L^p(\Omega).$$

Wir müssen zeigen, dass

$$\partial_i f = g^i$$

ist. Für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ gilt:

$$\int\limits_\Omega f\partial_i\varphi \leftarrow \int\limits_\Omega f_n\partial_i\varphi = -\int\limits_\Omega \partial_i f_n\varphi \to -\int\limits_\Omega g^i\varphi.$$

Also ist $g^i = \partial_i f$, d.h. $f \in W^{1,p}(\Omega)$ und somit

$$f_n \to f \qquad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

(2) reflexiv: $L^p(\Omega)$ ist reflexiv, also auch $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Definiere

$$T : W^{1,p}(\Omega) \to (L^p(\Omega))^{n+1} : \, f \mapsto (f, \partial_1 f, \ldots, \partial_n f). \tag{1.10}$$

Dann ist T eine Isometrie bezüglich der Norm (1.6), d.h. $T(W^{1,p}(\Omega))$ ist abgeschlossen in $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Aus FA I folgt dann, dass $T(W^{1,p}(\Omega))$ reflexiv ist und da T eine Isometrie ist, folgt weiter dass $W^{1,p}(\Omega)$ reflexiv ist.

(3) separabel: Da $L^p(\Omega)$ separabel ist, ist auch $(L^p(\Omega))^{n+1}$ separabel.

$$T(W^{1,p}(\Omega)) \subseteq (L^p(\Omega))^{n+1}$$

ist ein abgeschlossener Unterraum, also ist nach FA I dann auch $T(W^{1,p}(\Omega))$ separabel. Da T eine Isometrie ist haben wir gezeigt, dass $W^{1,p}(\Omega)$ separabel ist. ■

Dichtheit glatter Funktionen

Wir wollen zeigen, dass glatte Funktionen dicht in $W^{1,p}(\Omega)$ sind. Für $\varepsilon \geq 0$ definieren wir den **Glättungsoperator**

$$u_\varepsilon(x) := (\omega_\varepsilon * u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy \tag{1.11}$$

mit $\omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\omega(\frac{x}{\varepsilon})$, $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp}(\omega) \subseteq B_1(0)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega dx = 1$, $\omega \geq 0$. Dann gilt (Ana III)

$$u_\varepsilon \to u \qquad \text{in } L^p(\Omega)$$

und $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1.12 Lemma. *Sei Ω ein Gebiet und $G \subseteq\subseteq \Omega$. Für $u \in W^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, und alle $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\partial\Omega, G)$ gilt $u_\varepsilon \in W^{1,p}(G) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ferner gilt:*

$$u_\varepsilon \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(G)$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Aus Ana III wissen wir, dass $u_\varepsilon \to u$ in $L^p(\Omega)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\partial_i u_\varepsilon(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i^x \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \partial_i^y \omega_\varepsilon(x-y)u(y)\, dy \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)\partial_i u(y)\, dy \\
&= (\omega_\varepsilon * \partial_i u)(x) \\
&= (\partial_i u)_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

Da $\partial_i u \in L^p(\Omega)$ ist, folgt auch $(\partial_i u)_\varepsilon = \partial_i u_\varepsilon \in L^p(G)$ und

$$\partial_i u_\varepsilon \to \partial_i u \qquad \text{in } L^p(G).$$

■

1.13 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet und sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann gibt es eine Folge $(u_n) \subseteq W^{1,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ mit*

$$u_n \to u \qquad \textit{in } W^{1,p}(\Omega).$$

Beweis. Sei

$$U_j := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, \operatorname{dist}(\partial\Omega, x) < \frac{1}{j} \right\}$$

und

$$V_j := U_{j+3} \setminus \overline{U_{j+1}}$$

mit $V_0 := U_3$. Dann sind die V_j offen und

$$\Omega = \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j.$$

Wir benutzen eine Zerlegung der Eins, d.h.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1, \quad 0 \le \beta_j \le 1 \;\text{ und }\; \beta_j \in C_0^\infty(V_j).$$

Betrachte $u_j = u\beta_j$. Es gilt $u_j \in W^{1,p}(\Omega)$, denn

$$\begin{aligned}\int_\Omega u\beta_j \partial_j \varphi \, dx &= \int_\Omega u\partial_i(\beta_j\varphi) - u(\partial_i\beta_j)\varphi \, dx \\ &= -\int_\Omega \partial_i u \beta_j \varphi - u\partial_i\beta_j\varphi \, dx.\end{aligned}$$

Also ergibt sich

$$\partial_i(u\beta_j) = \partial_i u\beta_j + u\partial_i\beta_j \in L^p(\Omega)$$

und $\operatorname{supp}(u\beta_j) \subseteq V_j$. Sei $\delta > 0$, wähle $\varepsilon_j > 0$ klein genug und definiere

$$w_j := \omega_\varepsilon * (u\beta_j).$$

Dann ist $\|w_j - u\beta_j\|_{1,p} \le 2^{-(j+1)}\delta$ und $\operatorname{supp}(w_j) \subseteq V_{j+4} \setminus V_j$. Setze

$$w := \sum_{j=0}^{\infty} w_j.$$

Für $x \in \Omega$ sind nur endlich viele Summanden ungleich Null. Da $w_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist, ergibt sich $w \in C^\infty(\Omega)$. Für Punkte $x \in \partial\Omega$ ist $B_R(x_0) \cap V_j \neq \emptyset$ für unendlich viele $j \in \mathbb{N}$. Sei nun $K \subset\subset \Omega$ beliebig. Da in den Summen nur endlich viele Summanden unglrich Null sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\|w-u\|_{W^{1,p}(K)} &= \Big\| \sum_{j=0}^\infty w_j - \sum_{j=0}^\infty u\beta_j \Big\|_{W^{1,p}(K)} \\ &\le \sum_{j=0}^\infty \|w_j - u\beta_j\|_{W^{1,p}(K)} \\ &\le \sum_{j=0}^\infty \|w_j - u\beta_j\|_{W^{1,p}(\Omega)} \\ &\le \sum_{j=0}^\infty 2^{-(j+1)}\delta \\ &\le \delta.\end{aligned}$$

Wenn wir nun Ω durch eine monoton wachsende Folge K_i, $i \in \mathbb{N}$, ausschöpfen, erhalten wir mit dem Satz von Levi über monotone Konvergenz

$$\int_\Omega |w-u|^p + |\nabla w - \nabla u|^p \, dx = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \chi_{K_i}\big(|w-u|^p + |\nabla w - \nabla u|^p\big)\, dx \le \delta\,.$$

Da $\delta > 0$ belliebig war, folgt die Behauptung. ■

1.14 Satz. *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit Rand $\partial\Omega \in C^1$. Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \le p < \infty$. Dann existieren Funktionen $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit*

$$u_n \to u \qquad \textit{in } W^{1,p}(\Omega).$$

Beweis. (1) Da Ω einen C^1-Rand hat, wissen wir aus Ana III, dass es eine Funktion $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ gibt, so dass sich der Rand von Ω lokal durch γ darstellen lässt, d.h.

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \operatorname{graph}(\gamma) \cap B_r(x_0).$$

Dann ergibt sich

$$\Omega \cap B_r(x_0) = \{x \in B_r(x_0) \,\big|\, x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}.$$

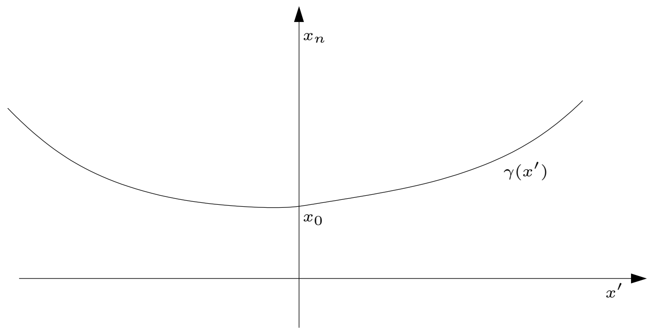

Abb. 1

Zur Vereinfachung schreiben wir $x = (x_1, \ldots, x_n) =: (x', x_n)$. Sei

$$V := B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \Omega.$$

Da $u \in W^{1,p}(\Omega)$ nur in Ω definiert ist kann man nicht um Randpunkte glätten. Die Idee ist daher, dass wir die Funktion vom Rand weg nach innen verschieben. Dazu definieren wir für $x \in V$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 2$

$$x^\varepsilon := x + (0, \ldots, 0, \lambda\varepsilon) = (x', x_n + \lambda\varepsilon).$$

Wähle $0 < \varepsilon < \frac{r}{16}$ und $\lambda = \frac{r}{4}\frac{1}{\varepsilon}$. Dann erhalten wir $B_\varepsilon(x^\varepsilon) \subseteq B_r(x_0)$ für alle $x \in B_{\frac{r}{2}}(x_0) \cap \Omega$. Setze $u^\varepsilon(x) := u(x^\varepsilon)$ für alle $x \in V$ und

$$w^\varepsilon(x) := (\omega_\varepsilon * u^\varepsilon)(x).$$

Dann ist $w^\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

$$w^\varepsilon \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(V), \tag{1.15}$$

denn

$$\begin{aligned} \|w^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} &\leq \|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \\ &=: I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon. \end{aligned}$$

Aus Ana III wissen wir, dass Translationen stetig in L^p sind, d.h.

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \to 0.$$

Um zu zeigen, dass $I_1^\varepsilon \to 0$ konvergiert, benutzen wir dass C_0^∞-Funktionen in L^p dicht sind. Es gibt also ein $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi - u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$. Dann gilt auch für die Translationen $\varphi^\varepsilon, u^\varepsilon$

$$\|\varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leq \frac{1}{n}.$$

I_1^ε lässt sich schreiben als

$$\begin{aligned}\|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} &= \|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)}\\ &\le \|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - \omega_\varepsilon * \varphi^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|\omega_\varepsilon * \varphi^\varepsilon - \varphi^\varepsilon\|_{L^p(V)}\\ &\quad + \|\varphi^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)}.\end{aligned}$$

Wiederum aus Ana III wissen wir, dass gilt

$$\|\omega_\varepsilon * g\|_{L^p(V)} \le \|g\|_{L^p(\tilde V)},$$

wobei $\tilde V$ eine entsprechend zu definierende Menge ist. Wähle $g = u^\varepsilon - \varphi^\varepsilon$, dann erhält man

$$\|\omega_\varepsilon * u^\varepsilon - \omega_\varepsilon * \varphi^\varepsilon\|_{L^p(V)} \le \|u^\varepsilon - \varphi^\varepsilon\|_{L^p(\tilde V)} \le \frac{1}{n}.$$

Da φ gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}|\omega_\varepsilon * \varphi^\varepsilon(x) - \varphi^\varepsilon(x)| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega_\varepsilon(x-y)(\varphi^\varepsilon(y) - \varphi^\varepsilon(x))\,dy\right|\\ &\le \int\limits_{|x-y|\le\varepsilon} \omega_\varepsilon(x-y)|\varphi^\varepsilon(x) - \varphi^\varepsilon(y)|\,dy\\ &\le \sup_{|x-y|\le\varepsilon} |\varphi^\varepsilon(x) - \varphi^\varepsilon(y)|\\ &\le \sup_{|x-y|<\varepsilon,\, x,y\in\overline{B_r(x_0)\cap\Omega}} |\varphi(x) - \varphi(y)| < \frac{1}{n}\end{aligned}$$

für ε klein genug. Wir haben also gezeigt, dass

$$I_1^\varepsilon = \|w^\varepsilon - u^\varepsilon\|_{L^p(V)} < \frac{3}{n}$$

ist und insgesamt

$$\|w^\varepsilon - u\|_{L^p(V)} \le I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0).$$

Ein analoges Vorgehen für $\nabla w^\varepsilon = \nabla(\omega_\varepsilon * u^\varepsilon) = \omega_\varepsilon * (\nabla u^\varepsilon)$ liefert

$$\|\nabla w^\varepsilon - \nabla u^\varepsilon\|_{L^p(V)} \to 0,$$

d.h. (1.15) gilt.

(2) Da der $\partial\Omega$ kompakt ist, gibt es Punkte $x_i \in \partial\Omega$, $i = 1, \dots, N$ und Mengen

$$V_i := B_{\frac{r_i}{2}}(x_i) \cap \Omega,$$

so dass gilt $\partial\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{N} B_{\frac{r_i}{2}}(x_i)$.

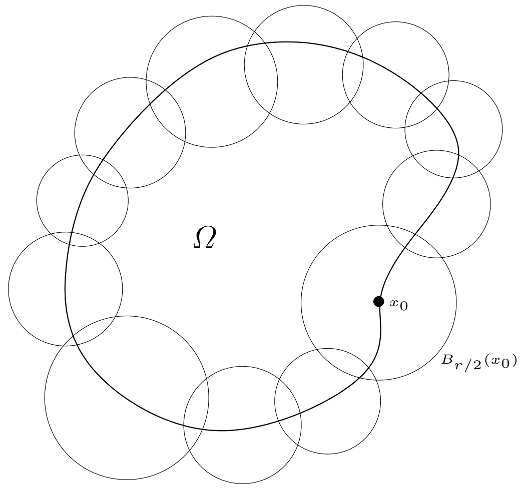

Abb. 2

Für $\delta > 0$ gibt es Funktionen $w_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\|w_i - u\|_{W^{1,p}(V_i)} \leq \delta.$$

Wähle $V_0 \subseteq\subseteq \Omega$, so dass sich ergibt

$$\Omega \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} V_i.$$

Nach Lemma 1.12 gibt es ein $w_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\|u - w_0\|_{W^{1,p}(V_0)} \leq \delta.$$

Wählt man eine Zerlegung der Eins λ_i, $i = 1, \ldots, N$, bezüglich der Überdeckung V_i, dann ist

$$w = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$$

und man erhält

$$\begin{aligned}
\|u - w\|_p &= \|\sum_{i=0}^{N} \lambda_i u - \sum_{i=0}^{N} \lambda_i w_i\|_p \\
&\leq \sum_{i=0}^{N} \|\lambda_i\|_\infty \|u - w_i\|_{L^p(V_i)} \\
&\leq (N+1)\delta
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\|\nabla u - \nabla w\|_p &= \Big\|\nabla\Big(\sum_{i=0}^N \lambda_i u\Big) - \nabla\Big(\sum_{i=0}^N \lambda_i w_i\Big)\Big\|_p \\ &= \sum_{i=0}^N \|\nabla\lambda_i\|_\infty \|u - w_i\|_{L^p(V_i)} + \|\lambda_i\|_\infty \|\nabla u - \nabla w_i\|_{L^p(V_i)} \\ &\le c \sum_{i=0}^N \|u - w_i\|_{W^{1,p}(V_i)} \\ &\le c(N+1)\delta,\end{aligned}$$

d.h.

$$\|u - w\|_{1,p} \le c\delta. \qquad \blacksquare$$

Wir wollen nun noch Kriterien angeben mit denen man entscheiden kann ob einen gegebene L^p-Funktion eine Sobolev-Funktion ist.

1.16 Satz. *Sei $u \in L^p(\Omega), 1 < p \le \infty$. Dann sind äquivalent:*

(i) $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ und $i = 1, \dots, n$ gilt*

$$\Big|\int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx\Big| \le c\,\|\varphi\|_{p'}.$$

(iii) *Es existiert eine Konstante $c > 0$, so dass für alle offenen Mengen $K \subseteq\subseteq \Omega$ und alle $h \in \mathbb{R}^n$ mit $|h| \le \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ gilt:*

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(K)} \le c\,|h|,$$

wobei $\tau_h u(x) := u(x+h)$.

In (ii) und (iii) kann man $c = \|\nabla u\|_p$ wählen.

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) :

$$\Big|\int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx\Big| = \Big| - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\varphi\, dx\Big| \overset{\text{Hölder}}{\le} \|\nabla u\|_p \|\varphi\|_{p'}\,.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ definieren wir

$$\tilde F_i(\varphi) := \int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\, dx.$$

Offensichtlich ist $\tilde F_i$ linear und stetig in $L^{p'}(\Omega)$, denn

$$|\tilde F_i(\varphi)| \le c\|\varphi\|_{p'}.$$

Da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^{p'}(\Omega)$ ist, gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach eine stetige, lineare Fortsetzung $F_i \in (L^{p'}(\Omega))^*$. Nach dem Repräsentationssatz von Riesz ist

$$(L^{p'}(\Omega))^* \cong L^p(\Omega),$$

d.h. es gibt ein $g \in L^p(\Omega)$ mit

$$F_i(\varphi) = \int_\Omega g\varphi \, dx \qquad \forall \, \varphi \in L^{p'}(\Omega),$$

d.h. $-g_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ nach Definition der schwachen Ableitung, also ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

(i) $\Rightarrow$ (iii) : Sei $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\Omega)$, $h \in \mathbb{R}^n$, $x \in \Omega$, $t \in \mathbb{R}$ und $v(t) := u(x+th)$. Dann ist $v'(t) = \nabla u(x+th)h$. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\begin{aligned}
\tau_h u(x) - u(x) &= v(1) - v(0) \\
&= \int_0^1 v'(t) \, dt \\
&= \int_0^1 \nabla u(x+th)h \, dt.
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für $|h| < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$ mithilfe des Satzes von Fubini und der Transformation $y = x + th$ sowie $K + th \subseteq \Omega$

$$\begin{aligned}
\int_K |\tau_h u(x) - u(x)|^p \, dx &\leq |h|^p \int_K \int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt \, dx \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_K |\nabla u(x+th)|^p \, dx \, dt \\
&= |h|^p \int_0^1 \int_{K+th} |\nabla u(y)|^p \, dy \, dt \\
&= |h|^p \|\nabla u\|_p^p.
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir gezeigt, dass für alle $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\Omega)$ gilt

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(K)} \leq c\,|h|.$$

Sei nun $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dann gibt es nach Satz 1.14 eine Folge $(u_n) \subseteq C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\Omega)$ mit $u_n \to u \in W^{1,p}(\Omega)$, also

$$\|\tau_h u - u\|_{p,K} \leftarrow \|\tau_h u_n - u_n\|_{p,K} \leq |h| \|\nabla u_n\|_p \to |h| \|\nabla u\|_p.$$

Diese Rechnung gilt allerdings nur für $p < \infty$, weil wir die Hölder-Ungleichung und die p-te Potenz der L^p-Norm verwendet haben. Für $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ wähle eine Folge $p_n \to \infty$. Dann gilt $\|u\|_{1,p_n} \to \|u\|_{1,\infty}$ und

$$\|\tau_h u - u\|_{\infty,K} \leftarrow \|\tau_h u - u\|_{p_n,K} \leq \|\nabla u\|_{p_n} |h| \to |h| \|\nabla u\|_\infty.$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq\subseteq K \subseteq\subseteq \Omega$ und $|h| < \operatorname{dist}(K, \partial\Omega)$. Aus (iii) erhält man

$$\Big| \int_\Omega (\tau_h u - u)\varphi \, dx \Big| \leq \|\tau_h u - u\|_{L^p(K)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c|h| \|\varphi\|_{p'} \tag{1.17}$$

und da (Substitution $y = x + h$)

$$\int_\Omega (u(x+h) - u(x))\varphi(x) \, dx = \int_\Omega u(x)\big(\varphi(x-h) - \varphi(x)\big) \, dx$$

folgt mit (1.17)

$$\Big| \int_\Omega u(x) \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{h} \, dx \Big| \leq c \|\varphi\|_{p'}.$$

Wenn man nun $h = -te_i$ wählt ergibt sich mit $t \to 0$

$$\Big| \int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \, dx \Big| \leq c \|\varphi\|_{p'}.$$

■

• Für $p = 1$ gilt:

$$\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)} \Leftrightarrow \text{(iii)}.$$

• Funktionen, bei denen (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) gilt, heißen Funktionen mit **beschränkter Variation**.

Fortsetzungen

Wir wollen zeigen, dass man eine Sobolev-Funktion über ein gegebenes Gebiet Ω hinaus als Sobolev-Funktion fortsetzen kann.

1.18 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$ und G eine offene Menge mit $\Omega \subseteq\subseteq G$. Dann gibt es für alle $p \in [1, \infty)$ einen beschränkten, linearen* **Fortsetzungsoperator**

$$E : W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n),$$

so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:

(i) *$Eu = u$ fast überall in Ω,*

(ii) $\operatorname{supp} Eu \subseteq G$,

(iii) $\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \le c\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$,

wobei c nur von p, Ω und G abhängt.

Beweis. Da Ω einen C^1-Rand hat, gibt es für alle $x_0 \in \partial\Omega$ ein $r > 0$, so dass sich der Rand von Ω in $B_r(x_0)$ durch eine C^1-Funktion γ darstellen lässt (vgl. Abb. 1).

(a) Wir behandeln zuerst den Fall, dass der Rand flach nahe x_0 ist, d.h. es gibt ein $r > 0$, so dass

$$\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \big\{(x', x_n) \,\big|\, x_n = 0\big\}.$$

Sei

$$\begin{aligned} B &:= B_r(x_0), \\ B^+ &:= B \cap \{x_n \ge 0\} \subseteq \overline{\Omega}, \\ B^- &:= B \cap \{x_n \le 0\} \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{aligned}$$

Wir setzen $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ durch eine gerade Reflektion höherer Ordnung an der Geraden zwischen B^+ und B^- lokal fort durch

$$\overline{u}(x) := \begin{cases} u(x) & x \in B^+\,, \\ -3u(x', -x_n) + 4u(x', -\frac{x_n}{2}) & x \in B^-\,. \end{cases} \tag{1.19}$$

Um zu beweisen, dass $u \in C^1(\overline{B})$ bezeichnen wir

$$u^- := \overline{u}\,\big|_{B^-} \qquad u^+ := \overline{u}\,\big|_{B^+}.$$

Dann ist $u^- = u^+$ auf $\{x_n = 0\}$ und auch $\partial_i u^- = \partial_i u^+$ für $i = 1, \dots, n-1$ auf $\{x_n = 0\}$. Außerdem gilt

$$\partial_n u^- = 3\partial_n u(x', x_n) + 4\partial_n u(x', -\frac{x_n}{2})(-\frac{1}{2}) = \partial_n u^+$$

auf $\{x_n = 0\}$. Insgesamt also

$$u^+ = u^- \text{ und } \nabla u^+ = \nabla u^- \text{ auf } \{x_n = 0\},$$

d.h. $u \in C^1(\overline{B})$. Weiter gilt

$$\int\limits_B |\overline{u}|^p\,dx = \int\limits_{B^+} |\overline{u}|^p\,dx + \int\limits_{B^-} |\overline{u}|^p\,dx \le c(p) \int\limits_{B^+} |u|^p\,dx$$

und

$$\int\limits_B |\nabla\overline{u}|^p\,dx = \int\limits_{B^+} |\nabla u|^p\,dx + \int\limits_{B^-} |\nabla\overline{u}|^p\,dx \le c(p) \int\limits_{B^+} |\nabla u|^p\,dx,$$

d.h.

$$\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(B)} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(B^+)}. \tag{1.20}$$

(b) Nun kommen wir zum allgemeinen Fall, d.h. der Rand von Ω ist nicht flach nahe x_0. Sei der Rand nahe x_0 durch $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ beschrieben. Durch die Transformation $x \mapsto y = \Phi(x)$, wobei

$$\begin{aligned} \Phi_i(x) &= y_i = x_i \,, \qquad && i = 1, \ldots, n-1 \,, \\ \Phi_n(x) &= y_n = x_n - \gamma(x') \,, \end{aligned} \tag{1.21}$$

hat das Bild $\Phi(B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ einen flachen Rand nahe y_0 bzgl. der y-Koordinaten (vgl. Plättbarkeitskriterium aus Ana III).

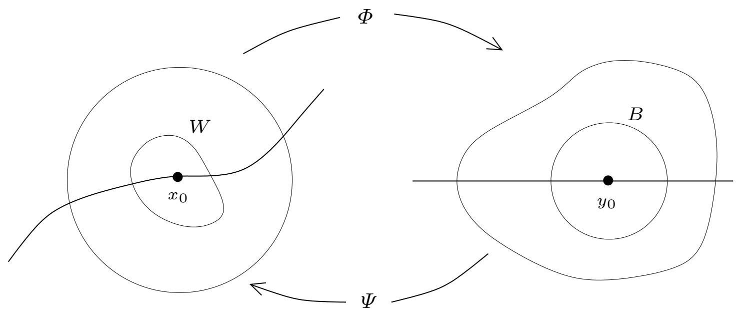

Abb. 3

Sei $x = \Psi(y)$ die Umkehrabbildung. Wir haben $\det(\nabla_x \Phi) = \det(\nabla_y \Psi) = 1$. Wir setzen

$$u'(y) = u(\Psi(y)).$$

Da $\Phi(B_r(x_0))$ kein Ball mehr ist, wählen wir uns einen neuen Ball B um $y_0 = \Phi(x_0)$, der in $\Phi(B)$ liegt. Wie in (a) erweitern wir u' von B^+ auf B^- und nennen die neue Funktion $\overline{u}'$. Aus (1.20) folgt dann

$$\|\overline{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \leq c\|u'\|_{W^{1,p}(B^+)}. \tag{1.22}$$

Sei $W := \Psi(B)$, also das Urbild des Balles B um y_0. Für $x \in W$ definieren wir

$$\overline{u}(x) = \overline{u}'(\Phi(x))$$

und erhalten durch Transformation

$$\int\limits_W |\overline{u}(x)|^p \, dx = \int\limits_{\Psi(B)} |\overline{u}'(\Phi(x))|^p \, dx = \int\limits_B |\overline{u}'(y)|^p \det \nabla_y \Psi \, dy,$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\int\limits_W |\nabla_x \overline{u}(x)|^p \, dx &= \int\limits_{\Psi(B)} |\nabla_x \overline{u}'(\Phi(x))|^p \, dx \\
&= \int\limits_{\Psi(B)} |\nabla_y \overline{u}'(\Phi(x))|^p |\nabla_x \Phi(x)|^p \, dx \\
&= \int\limits_B |\nabla_y \overline{u}'(y)|^p |\nabla_x \Phi(\Psi(y))|^p \det(\nabla_y \Psi(y)) \, dy \\
&\leq c(\gamma, p) \int\limits_B |\nabla_y \overline{u}'(y)|^p \, dy \, .
\end{aligned}
$$

Mithilfe von (1.22) und einer analogen Rechnung erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(W)} &\leq c\, \|\overline{u}'\|_{W^{1,p}(B)} \\
&\leq c\, \|u'\|_{w^{1,p}(B^+)} \\
&\leq c\, \|u\|_{W^{1,p}(W^+)} \\
&\leq c\, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir gezeigt:

$$
\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(W)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.23}
$$

(c) Da der Rand von Ω kompakt ist, gibt es eine endliche Überdeckung mit Mengen W_i, $i = 1, \ldots, N$, wobei $W_i \subseteq\subseteq G$. Sei u_i die Fortsetzung von u auf W_i. Sei $W_0 \subseteq\subseteq \Omega$ so dass $\Omega \subseteq \bigcup\limits_{i=0}^{N} W_i$. Außerdem seien λ_i eine Zerlegung der Eins. Setze nun

$$
\overline{u} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i u_i
$$

wobei $u_0 = u$. Dann ergibt sich mit (1.23)

$$
\|\overline{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \tag{1.24}
$$

(d) Für $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ setze $Eu = \overline{u}$. Zu $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gibt es nach Satz 1.14 eine Folge $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$
u_n \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(\Omega).
$$

Es ist

$$
\|Eu_k - Eu_n\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq c \|u_n - u_k\|_{W^{1,p}(\Omega)},
$$

d.h. (Eu_n) ist Cauchyfolge in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und somit

$$
Eu_n \to v =: Eu.
$$

■

- Der Satz gilt auch für den Fall $p = \infty$.

Randwerte

L^p-Funktionen haben keine wohl-definierten Werte auf den Rand des Gebietes auf dem sie definiert sind. Für Sobolev-Funktionen allerdings kann man Randwerte definieren. Um dies zu zeigen benötigen wir L^p-Räume auf dem Rand $\partial\Omega$. Wir setzen

$$L^p(\partial\Omega) := \{u : \partial\Omega \to \mathbb{R} \,\big|\, \text{messbar}, \, \|u\|_{p,\partial\Omega} < \infty\} \tag{1.25}$$

und versehen den Raum mit der Norm

$$\|u\|_{p,\partial\Omega} := \Big(\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p \, ds\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Oberflaechenmass Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Jede Funktion $u \in C^1(\overline{\Omega})$ besitzt eine Restriktion $\tilde{R}u$ auf $\partial\Omega$, die definiert wird durch

$$(\tilde{R}u)(z) := u(z)\,, \qquad z \in \partial\Omega\,. \tag{1.26}$$

1.27 Lemma. *Es gibt eine Konstante K, die nur von Ω abhängt so, dass für alle $u \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt:*

$$\|\tilde{R}u\|_{L^p(\partial\Omega)} \le K\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \qquad \forall u \in C^1(\overline{\Omega})\,.$$

Beweis. Da $\partial\Omega \in C^1$ gibt es für jeden Punkt x_0 des Randes einen Ball $B_r(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, so dass der Rand lokal durch eine C^1–Funktion $\gamma(x')$ beschrieben werden kann (vgl. Abb. 1). Wir benutzen weiterhin die Notation $x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$.

(a) Sei $x_0 \in \partial\Omega$ und sei der Rand nahe x_0 flach, d.h. es gibt ein $r > 0$ so, dass $\partial\Omega \cap B_r(x_0) = \{(x', x_n) \,\big|\, x_n = 0\}$. Sei τ eine Abschneidefunktion, d.h. $\tau \in C_0^\infty(B_r(x_0))$ mit $\tau = 1$ in $B_{r/2}(x_0)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, dx' &\le \int\limits_{\{x_n=0\}} |u|^p \, \tau \, dx' = -\int\limits_{B_r^+(x_0)} \partial_{x_n}\big(|u|^p \, \tau\big) \, dx \\
&= -\int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^p \, \partial_{x_n}(\tau) + p\,|u|^{p-1} \operatorname{sign}(u) \partial_{x_n}(u) \, \tau \, dx \\
&\le c(r) \int\limits_{B_r^+(x_0)} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx\,,
\end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile die Young-Ungleichung benutzt haben.

(b) Sei nun der Rand nahe x_0 nicht flach und lokal durch $\gamma \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$ beschrieben. Wir benutzen wiederum die Transformation $x \mapsto y = \Phi(x)$ aus (1.21). Wie dort gesehen hat das Bild $\Phi(B_r(x_0) \cap \partial\Omega)$ einen flachen Rand nahe y_0 bzgl. der y-Koordinaten (vgl. Abb. 3). Für die Umkehrabbildung $x = \Psi(y)$ und die Transformation Φ gilt wieder $\det(\nabla_x \Phi) = \det(\nabla_y \Psi) = 1$. Somit gilt für $\tilde{u}(y) := u(\Psi(y))$ unter Berücksichtigung von (a) und $\gamma \in C^1$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega} |u|^p \, dS &= \int\limits_{\Phi(B_{r/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} |\tilde{u}|^p \sqrt{1 + |\nabla_{y'}\gamma(y')|^2} \, dy' \\
&\le c \int\limits_{\Phi(B_r(x_0)\cap\Omega)} |\tilde{u}|^p + |\nabla_y \tilde{u}|^p \, dy \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla_x u|^p |\nabla_y \Psi(\Phi(x))|^p \, dx \\
&\le c \int\limits_{B_r(x_0)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla_x u|^p \, dx \,.
\end{aligned}
$$

(c) Da $\partial\Omega$ kompakt ist existieren endlich viele Punkte $x_0^i \in \partial\Omega$, $i = 1,\ldots,N$ so, dass $\partial\Omega = \cup_{i=1}^N \partial\Omega \cap B_{r^i/2}(x_0^i)$, wobei für jedes $i = 1,\ldots,N$ der Rand nahe x_0^i durch eine Funktion γ^i (siehe (b)) beschrieben ist. Eine wiederholte Anwendung von (b) liefert

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\partial\Omega} |u|^p \, dS &\le \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i}(x_0^i)\cap\partial\Omega} |u|^p \, dx \\
&\le c \sum_{i=1}^N \int\limits_{B_{r^i}(x_0^i)\cap\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \\
&\le c \int\limits_{\Omega} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx \,,
\end{aligned}
$$

was gerade die Behauptung von Lemma 1.27 ist. ■

1.28 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega \in C^1$. Dann existiert für alle $p \in [1,\infty)$ ein beschränkter linearer Operator R*

$$
R : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \,,
$$

*der für Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ mit dem Restriktionsoperator $\tilde{R}$ aus (1.26) übereinstimmt. R heißt Restriktions- oder **Spuroperator**.*

Beweis. Zu $u \in W^{1,p}(\Omega)$ exitieren nach Satz 1.14 Funktionen $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$ mit $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Aus Lemma 1.27 folgt

$$
\|\tilde{R}u_n - \tilde{R}u_k\|_{L^p(\partial\Omega)} \le K \, \|u_n - u_k\|_{1,p}
$$

und somit ist $(\tilde{R}u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Also existiert ein $v \in L^p(\partial\Omega)$ mit $\tilde{R}u_n \to v$ in $L^p(\partial\Omega)$. Man definiert $Ru := v$ und erhält

$$\|Ru\|_{L^p(\partial\Omega)} \le K \|u\|_{1,p} .$$

Somit haben wir gezeigt, dass man $\tilde{R}$ durch Abschliessung auf ganz $W^{1,p}(\Omega)$ zu einer beschränkten linearen Abbildung $R : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ fortsetzen lässt. ■

• Die Abbildung R wird verwendet, um Elementen aus $W^{1,p}(\Omega)$, die eigentlich Klassen von Funktionen sind, die bis auf Nullmengen erklärt sind, dennoch Werte auf dem Rand $\partial\Omega$, welcher Mass Null hat, zuzuordnen.

1.29 Definition. *Sei Ω ein Gebiet und $1 \le p < \infty$. Wir definieren $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ durch den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm von $W^{1,p}(\Omega)$, d.h.*

$$W_0^{1,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}}. \tag{1.30}$$

• Per Definition ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$ und somit ein Banachraum.

1.31 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1$ und $1 \le p < \infty$. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gehört zu $W_0^{1,p}(\Omega)$ genau dann, wenn für ihre Spur gilt:*

$$Ru = 0.$$

Beweis. "⇒" Zu $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gibt es per definition eine Folge $u_n \in C_0^\infty(\Omega)$ mit

$$u_n \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(\Omega).$$

Offenbar ist $Ru_n = 0$, d.h. es gilt auch $Ru = 0$ in $L^p(\partial\Omega)$.

"⇐" Sei $Ru = 0$ auf dem Rand von Ω. Wie schon im vorherigen Beweis liefern eine Zerlegung der Eins und das "Flach machen" des Randes eine Funktion

$$\begin{aligned} &u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+), \\ &\operatorname{supp} u \subseteq\subseteq \mathbb{R}^n_+, \\ &Ru = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^{n-1} := \partial\mathbb{R}^n_+. \end{aligned} \tag{1.32}$$

Da $Ru = 0$ ist, liefern Satz 1.14 und Satz 1.28 eine Folge $u_m \in C^\infty(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ und

$$Ru_m \to 0 \qquad \text{in } L^p(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{1.33}$$

Sei $x = (x', x_n)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $x_n > 0$. Dann ergibt sich

$$|u_m(x', x_n)| \le |u_m(x', 0)| + \int_0^{x_n} |\partial_n u_m(x', t)| dt$$

und somit

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',x_n)|^p\,dx' &\le c \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_m(x',0)|^p\,dx' + c \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int\limits_0^{x_n} |\partial_n u_m(x',t)|\,dt\Big)^p\,dx' \\ &\le \underbrace{c\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_m(x',0)|^p\,dx'}_{\to 0} + c\,x_n^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^{x_n} |\nabla u_m(x',t)|^p\,dt\,dx',\end{aligned}$$

d.h.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x',x_n)|^p\,dx' \le c\,x_n^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_0^{x_n} |\nabla u(x',t)|^p\,dt\,dx'\,. \tag{1.34}$$

Nun wollen wir u in Richtung x_n verschieben. Dazu benutzen wir eine Abschneidefunktion ξ mit $0 \le \xi \le 1$, $\xi = 1$ auf $[0,1]$ und $\xi = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-1,2]$. Diese skalieren wir durch

$$\xi_m(x) := \xi_m(x',x_n) = \xi(mx_n), \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}^n_+$$

und definieren

$$w_m(x) := u(x)(1-\xi_m(x)).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\partial_k w_m(x) &= \partial_k u(x)(1-\xi_m(x))\,, \qquad k = 1,\ldots,n-1\,,\\ \partial_n w_m(x) &= \partial_n u(x)(1-\xi_m(x)) - u(x)\xi_m'(mx_n)m\,,\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla w_m - \nabla u|^p\,dx &\le c \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u(x)|^p |\xi_m(x)|^p\,dx \\ &\quad + c\,m^p \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x',x_n)|^p |\xi'(mx_n)|^p\,dx'\,dx_n \\ &=: A_m + B_m.\end{aligned}$$

Da $\operatorname{supp}(\xi_m) \subset [0,\frac{2}{m}]$ sowie $|\xi| \le 1$ sieht man leicht, dass

$$A_m \le c \int\limits_0^{\frac{2}{m}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u(x)|^p |\xi(mx_n)|^p\,dx'\,dx_n \to 0$$

und

$$B_m \overset{(1.34)}{\leq} c\, m^p \int_0^{\frac{2}{m}} x_n^{p-1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{x_n} |\nabla u(x',t)|^p \, dt \, dx' \, dx_n$$

$$\leq c\, m^p \frac{1}{(2m)^p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_0^{\frac{2}{m}} |\nabla u(x',t)|^p \, dx' \, dt \to 0.$$

Somit konvergiert $\nabla w_m \to \nabla u$ und $w_m \to u$ in $L^p(\mathbb{R}^n_+)$, d.h.

$$w_m \to u \qquad \text{in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$$

und

$$w_m(x', x_n) = 0 \quad \text{für} \quad x_n \in (0, \tfrac{1}{m}).$$

Wir glätten nun w_m mit ω_ε, $\varepsilon < \frac{1}{m}$. Nach Lemma 1.12 ist $\omega_\varepsilon * w_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ und $\overline{w}_m := \omega_{\frac{1}{2m}} * w_m$ konvergiert gegen u in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$, d.h. u liegt in $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. ∎

Für Funktionen aus $W_0^{1,p}(\Omega)$ kann man die Norm der Funktion durch die Norm des Gradienten abschätzen. Genauer gilt folgendes:

1.35 Satz (Poincaré). *Sei Ω ein beschränktes Gebies und $1 \leq p < \infty$. Dann gibt es eine Konstante K, die nur von p und dem Durchmesser von Ω abhängt, so dass für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gilt*

$$\|u\|_p \leq K\, \|\nabla u\|_p. \tag{1.36}$$

Somit ist $\|\nabla u\|_p$ eine äquivalente Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$, d.h.

$$\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p} \leq (1+K)\|\nabla u\|_p. \tag{1.37}$$

Beweis. Da $C_0^\infty(\Omega)$-Funktionen dicht sowohl in $L^p(\Omega)$ als auch in $W^{1,p}(\Omega)$ sind, reicht es die Behauptung (1.36) für solche Funktionen zu zeigen. Sei also $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|u\|_p^p &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\Omega |u|^p \cdot 1 \, dx \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i |u|^p \, x_i \, dx \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_\Omega p|u|^{p-1} \frac{u}{|u|} \partial_i u \, x_i \, dx\,.
\end{aligned}$$

Da Ω beschränkt ist, gibt es ein d, so dass

$$\Omega \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x_i| \leq d,\, i = 1, \dots, n\}.$$

Wenn wir die obige Rechnung fortführen, erhalten wir mithilfe der Hölder Ungleichung

$$\begin{aligned} \|u\|_p^p &\leq \frac{d}{n} p \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |u|^{p-1} |\nabla u| \, dx \\ &\leq \frac{d}{n} p \sum_{i=1}^{n} \|u\|_p^{p-1} \|\nabla u\|_p, \end{aligned}$$

also

$$\|u\|_p \leq dp \, \|\nabla u\|_p.$$

Zu $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u \in W^{1,p}(\Omega)$ und es folgt

$$\|u\|_p \leftarrow \|u_m\|_p \leq dp \, \|\nabla u_m\|_p \to dp \, \|\nabla u\|_p,$$

d.h. (1.36). Hieraus folgt sofort (1.37), denn

$$\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|\nabla u\|_p \leq K \, \|\nabla u\|_p + \|\nabla u\|_p.$$

■

• Die Poincaré Ungleichung ermöglicht es für schwache Lösungen der homogenen Poissongleichung eine apriori Abschätzung zu beweisen. Eine *schwache Lösung* $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ erfüllt

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} f \, \varphi \, dx.$$

Wenn man nun $\varphi = u$ wählt, dann erhält man mithilfe der Poincaré Ungleichung

$$\|\nabla u\|_2^2 = \int |\nabla u|^2 dx \leq \int f u dx \leq \|f\|_2 \|u\|_2 \leq K \|\nabla u\|_2 \|f\|_2.$$

Kürzen liefert dann die *apriori Abschätzung*

$$\|\nabla u\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

Einbettungen

In Anwendungen werden oft sogenannte *Sobolew Ungleichungen* benötigt. Dies sind Ungleichungen der Form

$$\|u\|_q \leq c \, \|\nabla u\|_p \, , \tag{1.38}$$

wobei die Konstante c und die Zahl q nicht von u abhängen soll. Zuerst überlegen wir uns für welche q dies möglich ist im Falle von Funktionen $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sei also $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), u \not\equiv 0$ und sei $\lambda > 0$. Wir setzen

$$u_\lambda(x) := u(\lambda x), \qquad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Man rechnet leicht nach

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \; dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \; dx = \frac{1}{\lambda^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \; dy\,,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda|^p \; dx = \lambda^p \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(\lambda x)|^p \; dx = \frac{\lambda^p}{\lambda^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \; dy\,.$$

Dies eingesetzt in (1.38) liefert

$$\frac{1}{\lambda^{\frac{n}{q}}} \left\|u\right\|_q \le c \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{n}{p}}} \left\|\nabla u\right\|_p \,,$$

d.h.

$$\left\|u\right\|_q \le \lambda^{1-\frac{n}{p}+\frac{n}{q}} \left\|\nabla u\right\|_p \,.$$

Wenn $1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \neq 0$ ist, kann man λ gegen 0 bzw. ∞ konvergieren lassen und erhält einen Widerspruch. Somit kann (1.38) nur gelten, wenn

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \tag{1.39}$$

gilt. Dies kann man auch alternativ schreiben als

$$q = \frac{np}{n-p}\,.$$

1.40 Satz. *Sei $1 \le p < n$. Dann existiert eine Konstante c, die nur von p und n abhängt, so dass*

$$\left\|u\right\|_q \le c \left\|\nabla u\right\|_p \,, \quad q = \frac{np}{n-p}\,, \tag{1.41}$$

für alle $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ gilt.

Wir benötigen hier wirklich $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$, wie $u \equiv 1$ zeigt. Bemerkenswert ist, dass die Konstante c nicht von der Größe des Trägers von u abhängt.

Beweis. (i) Der Fall $p = 1$. Da u kompakten Träger hat gilt

$$u(x) = \int\limits_{-\infty}^{x_i} D_{x_i} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)\, dy_i$$

und somit

$$|u(x)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| \; dy_i, \quad i = 1, \ldots, n\,.$$

Daraus folgt

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)| \; dy \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Diese Ungleichung wird bezüglich x_1 über $\mathbb{R}$ integriert, was

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \; dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1 \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\prod_{i=2}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dx_1 \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} ,
\end{aligned}$$

liefert. In der letzten Ungleichung wurde die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung

$$\int_{\Omega} \prod_{i=1}^{k} |f_i| \; dx \leq \prod_{i=1}^{k} \|f_i\|_{p_i} , \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = 1 ,$$

angewendet. Die obige Ungleichung wird nun bzgl. x_2 über $\mathbb{R}$ integriert. Wir erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \; dx_1 \, dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^{n} I_i^{\frac{1}{n-1}} \; dx_2 ,$$

wobei

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_1 , \quad I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dx_1 \, dy_i , \quad i = 3, \ldots, n .$$

Die verallgemeinerte Hölder-Ungleichung liefert

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \; dx_1 \, dx_2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dx_1 \, dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dy_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \times \\
\times \prod_{i=3}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| \; dx_1 \, dx_2 \, dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} .
\end{aligned}$$

Weitere Integrationen bzgl. $x_3, \dots, x_n$ liefern dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\, dx \le \prod_{i=1}^{n} \Bigg(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\nabla u|\, dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \Bigg)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|\, dx \Bigg)^{\frac{n}{n-1}} \tag{1.42}$$

was (1.41) für $p = 1$ ist.

(ii) Der Fall $1 < p < n$. Wir benutzen (1.42) für $v = |u|^\gamma$, mit $\gamma > 1$ welches später gewählt wird, und erhalten

$$\begin{aligned}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}}\, dx \Bigg)^{\frac{n}{n-1}} &\le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|\nabla |u|^\gamma \big|\, dx \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \gamma\, |u|^{\gamma-1}\, |\nabla u|\, dx \\ &\le \gamma \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}}\, dx \Bigg)^{\frac{p-1}{p}} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx \Bigg)^{\frac{1}{p}} .\end{aligned}$$

Wir wählen nun γ derart, dass

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} \, ,$$

d.h. $\gamma = p \frac{(n-1)}{n-p} > 1$. Für dieses γ haben wir

$$\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma - 1) \frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} \, ,$$

was zusammen mit der obigen Rechnung

$$\|u\|^{\gamma}_{\frac{np}{n-p}} \le \gamma\, \|u\|^{\gamma-1}_{\frac{np}{n-p}}\, \|\nabla u\|_p$$

liefert. Hieraus folgt sofort die Behauptung. ∎

1.43 Satz. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert eine Konstante $K = K(n, \Omega)$, so dass für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_q \le K\, \|u\|_{1,p}, \qquad q = \frac{np}{n-p} \tag{1.44}$$

sofern $1 \le p < n$. Ist $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, so gilt

$$\|u\|_q \le K\, \|\nabla u\|_p, \qquad q = \frac{np}{n-p} \, . \tag{1.45}$$

Man schreibt dafür kurz: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ bzw. $W^{1,p}_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$.

Beweis. (i) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Satz 1.18 liefert, dass eine Fortsetzung $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ gibt, die kompakten Träger hat. Somit ist $Eu \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ und per Definition existieren Funktionen $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit

$$u_m \to Eu \qquad \text{in } W^{1,p}(\mathbb{R}^n)\,. \tag{1.46}$$

Satz 1.40 liefert

$$\|u_m - u_k\|_{\frac{pn}{n-p}} \le c\,\|\nabla(u_m - u_k)\|_p \to 0\,,$$

woraus

$$u_m \to Eu \quad \text{in } L^{\frac{pn}{n-p}}(\mathbb{R}^n) \tag{1.47}$$

folgt. Satz 1.40 liefert auch

$$\|u_m\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

was zusammen mit (1.46) und (1.47)

$$\|Eu\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|\nabla(Eu)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

ergibt. Dies und Satz 1.18 liefern die Behauptung (1.44).

(ii) Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existieren Funktionen $u_m \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_m \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir setzen die Funktionen u_m durch Null auf ganz $\mathbb{R}^n$ fort und erhalten aus Satz 1.40

$$\|u_m\|_{L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)} \le c\,\|\nabla u_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

sowie $u_m \to u$ in $L^{\frac{np}{n-p}}(\mathbb{R}^n)$. Der Grenzübergang $m \to \infty$ liefert (1.45). ■

- Für $p = n$ gibt es zahlreiche Sonderfälle, wie z.B.
  $n = 1:$ $\quad W^{1,1} \hookrightarrow L^\infty$
  $n = 2:$ $\quad W^{1,2} \not\hookrightarrow L^\infty$, aber $W^{2,1} \hookrightarrow L^\infty$

1.48 Satz. *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann existiert für alle $1 \le q < \infty$ eine Konstante $K = K(n, q, \Omega)$, so dass für alle $u \in W^{1,n}(\Omega)$ gilt:*

$$\|u\|_q \le K\,\|u\|_{W^{1,n}}. \tag{1.49}$$

Für $u \in W_0^{1,n}(\Omega)$ gilt:

$$\|u\|_q \le K\,\|\nabla u\|_n. \tag{1.50}$$

Beweis. Für ein beschränktes Gebiet Ω gilt $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,p}(\Omega)$ für beliebige $1 \le p < n$, so dass Satz 1.43 die Behauptung liefert. ■

• Für $p > n$ gibt es Einbettungen in $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, d.h. u ist stetig in $\overline{\Omega}$ und es gilt

$$|u|_\alpha := \sup_{x\neq y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|} \le c.$$

Zusammen mit der Norm

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} := \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + |u|_\alpha$$

bildet $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ den Banachraum der **Hölderstetigen Funktionen**.

1.51 Satz. *Sei $p > n$ und sei Ω ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann gilt für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}} \le c\,\|u\|_{1,p}, \tag{1.52}$$

mit $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Man schreibt dafür kurz: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

1.53 Satz (Rellich). *Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^{0,1}$. Dann sind die Einbettungen*

(i) $1 \le p < n,\ q \in [1, \frac{np}{n-p})$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

(ii) $p = n,\ 1 \le q < \infty$

$$W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

(iii) $p > n$

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$$

kompakt. Insbesondere ist die Einbettung

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

immer kompakt. Für kompakte Einbettungen schreibt man: $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega)$

Beweis. (i) Wir wollen den Satz von Kolmogorov (vgl. FA I) anwenden, der besagt, dass eine beschränkte Menge des L^q relativ kompakt ist, wenn sie gleichgradig q-stetig ist. Sei M eine beschränkte Menge im $W^{1,p}(\Omega)$ und seien $G, G_1 \subset \mathbb{R}^n$ beschränkte Mengen mit $\Omega \subseteq\subsetneq G \subseteq\subsetneq G_1$. Der Fortsezungsoperator E aus Satz 1.18 liefert für alle $u \in M$ Funktionen $Eu \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ mit $\operatorname{supp} Eu \subseteq\subsetneq G$. Mithilfe der Hölder Ungleichung, der Einbettung $W^{1,p} \hookrightarrow L^{\frac{np}{n-p}}$ (vgl. Satz 1.43) und Satz 1.18 folgt für alle $1 \le q < \frac{np}{n-p}$

$$
\begin{aligned}
\|Eu\|^q_{L^q(G_1)} &\le c(G_1)\|Eu\|^q_{L^{\frac{n-p}{np}}(G_1)} \\
&\le c(G_1)\|Eu\|^q_{W^{1,p}(G_1)} \le c\,\|u\|^q_{W^{1,p}(\Omega)} \le K,
\end{aligned} \tag{1.54}
$$

d.h. $E(M)$ ist beschränkt in $L^q(G_1)$. Wir benutzen die **Interpolationsungleichung**

$$
\|v\|_{L^q(G_1)} \le \|v\|^{1-\lambda}_{L^1(G_1)}\|v\|^{\lambda}_{L^r(G_1)} \tag{1.55}
$$

welche für $1 < q < r$, $v \in L^r(G_1)$ sowie $\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{1} + \frac{\lambda}{r}$ gilt. Diese Ungleichung kann mithilfe der Hölder Ungleichung bewiesen werden. Mithilfe von (1.55) und (1.54) ergibt sich für $|h| < \operatorname{dist}(G, \mathbb{R}^n \setminus G_1)$

$$
\begin{aligned}
\Big(\int\limits_G |Eu(x+h) - Eu(x)|^q\,dx\Big)^{\frac{1}{q}} &\le \Big(\int\limits_G |Eu(x+h)-Eu(x)|\,dx\Big)^{1-\lambda} \times \\
&\quad \times \Big(\int\limits_G |Eu(x+h)-Eu(x)|^{\frac{np}{n-p}}\,dx\Big)^{\lambda\frac{np}{n-p}} \\
&\le c\Big(\int\limits_G |Eu(x+h)-Eu(x)|\,dx\Big)^{1-\lambda} \\
&\le c\,|h|^{1-\lambda},
\end{aligned}
$$

wobei wir im letzten Schritt Satz 1.16 und die Beschränktheit von $E(M)$ in $W^{1,1}(G_1)$ benutzt haben. Die Menge $E(M)$ ist also q-gleichgradig stetig und wir können den Satz von Kolmogorov anwenden, d.h. $\{Eu \,\big|\, u \in M\}$ ist relativ kompakt in $L^q(G)$. Da $Eu(x) = u(x)$ für fast alle $x \in \Omega$ ist auch M relativ kompakt in $L^q(\Omega)$.

(ii) Für $p = n$ gilt die Einbettung $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ für alle $1 \le r < \infty$. Deshalb gilt für ein $r > q$ und ähnlichen Argumenten wie im Teil (i)

$$
\begin{aligned}
\|Eu(\cdot+h) - Eu\|_{L^q(G)} &\le \|Eu(\cdot+h) - Eu\|^{1-\lambda}_{L^1(G)}\|Eu(\cdot+h) - Eu\|^{\lambda}_{L^r(G)} \\
&\le c\,|h|^{1-\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

Die Behauptung folgt wiederum mit dem Satz von Kolmogorov.

(iii) Wir wollen den Satz von Arzela–Ascoli benutzen. Nach Satz 1.51 gilt die Einbettung $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Wenn also $M \subseteq W^{1,p}(\Omega)$ beschränkt ist, dann ist M auch in $C^0(\overline{\Omega})$ beschränkt. Weiterhin gilt aufgrund von (1.52) für alle $u \in M$

$$
\|u\|_{C^{0,\alpha}} \le c\,\|u\|_{1,p} \le K.
$$

Insbesondere gilt für $u \in M$

$$
\sup_{x \ne y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} \le K,
$$

d.h. für alle $x \neq y \in \overline{\Omega}$ und $u \in M$ ist

$$|u(x) - u(y)| \leq K|x - y|^\alpha,$$

d.h. M ist gleichgradig stetig und nach dem Satz von Arzela-Ascoli relativ kompakt in $C^0(\overline{\Omega})$. ■