Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 18.01.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 12

Abgabe: **Donnerstag, 25.01.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(6 Punkte)**

Sei γ die ebene, geschlossene Kurve mit der Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix}, \qquad -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \le t \le \tfrac{1}{\sqrt{3}}.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt, der von γ umrandeten Fläche. Bestimmen Sie die maximale Krümmung von γ für $-\frac{1}{\sqrt{3}} < t < \frac{1}{\sqrt{3}}$ und berechnen Sie den Normalenvektor von γ an der Stelle, an der die maximale Krümmung angenommen wird. Berechnen Sie außerdem den Winkel α, den die Tangentialvektoren an den Stellen $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ bilden.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Bei der Rotation einer durch die Gleichung $x^2 + (y-b)^2 = a^2$, mit $0 < a < b$, bestimmten Kreisfläche um die x–Achse, wird ein sogenannter Torus erzeugt. Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Torus.

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

Sei $x_j := \frac{\pi}{6} j$ für $j = 0, \ldots, 6$. Nähern Sie das Integral $\int_0^\pi \sin(x)\,dx$ für die Stützstellen $x_0, \ldots, x_6$ mittels

(a) der Riemannschen Summe $\sum_{j=0}^{5} f(x_j)(x_{j+1} - x_j)$,

(b) der Trapezregel und

(c) der Simpson Regel an.

Vergleichen Sie die Werte mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Überprüfen Sie, ob die folgenden Reihen bedingt und/oder absolut konvergieren:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k}},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sin(k) k^2 q^k,$$

wobei $0 < q < 1$.