Mathematik für Physiker und Ingenieure I

Nachtrag zur Eulerschen Zahl e

Satz 1. *Die Folgen $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 0}$, mit*

$$c_n := \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad d_n := \sum_{k=0}^{n} \tfrac{1}{k!},$$

sind beide monoton wachsend und konvergieren gegen den gleichen Grenzwert, der mit e bezeichnet wird. Außerdem gilt

$$c_n \leq d_n \leq e.$$

Beweis. In der Vorlesung wurde schon gezeigt, dass $c_n \leq d_n \leq 3$ gilt für alle $n \geq 1$ und dass beide Folgen monoton wachsend sind. Damit müssen $(c_n)_{n\geq 1}$ und $(d_n)_{n\geq 0}$ als monoton wachsende, beschränkte Folgen konvergieren. Wie in der Vorlesung sei $\tilde{e} := \lim_{n\to\infty} c_n$ und $e := \lim_{n\to\infty} d_n$. Aus $c_n \leq d_n$ für $n \geq 1$ und der Monotonie von $(d_n)_{n\geq 0}$ folgt nun $\tilde{e} \leq e$ und $c_n \leq d_n \leq e$. Wir müssen also nur noch zeigen, dass $e = \tilde{e}$ ist. Hierfür genügt es wegen $\tilde{e} \leq e$ zu zeigen, dass $\tilde{e} \geq e$ ist. Wir werden zunächst zeigen, dass $\tilde{e} \geq d_N$ gilt für alle $N \geq 1$. Hieraus folgt dann mit $N \to \infty$ die Beziehung $\tilde{e} \geq e$ und der Beweis ist beendet. Es bleibt also noch $\tilde{e} \geq d_N$ zu zeigen. Sei also $N \geq 1$ und $n \geq N$, dann gilt

$$\begin{aligned} c_n &= \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \qquad \text{(nach der binomischen Formel)} \\ &\geq \sum_{k=0}^{N} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \frac{n \ \cdots \ (n+1-k)}{n \ \cdots \ n}. \end{aligned}$$

Lassen wir n gegen ∞ gehen, so folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{e} = \lim_{n\to\infty} c_n &\geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \frac{n \ \cdots \ (n+1-k)}{n \ \cdots \ n} && \text{(endliche Summe)} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k!} \frac{n \ \cdots \ (n+1-k)}{n \ \cdots \ n} && \text{(endliches Produkt)} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\right)}_{=1} \cdots \underbrace{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n+1-k}{n}\right)}_{=1} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = d_N. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir in den ersten beiden Schritten benutzt, dass der Limes von endlich vielen Summanden bzw. Faktoren gleich der Summe bzw. dem Produkt der Grenzwerte der einzelnen Summanden bzw. Faktoren ist. $\square$