Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

19.10.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 1

Abgabe: **Donnerstag, 26.10.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe von Wahrheitstabellen folgende sogenannte **De Morganschen Regeln** für logische Aussagen:

$$\begin{aligned}
\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B), \\
\neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B), \\
(A \wedge B) \vee C &= (A \vee C) \wedge (B \vee C), \\
(A \vee B) \wedge C &= (A \wedge C) \vee (B \wedge C),
\end{aligned}$$

wobei A, B, C Aussagen sind.
Alternativ können Sie auch die **De Morganschen Regeln** für Mengen beweisen:

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^{\complement} &= A^{\complement} \cup B^{\complement}, \\
(A \cup B)^{\complement} &= A^{\complement} \cap B^{\complement}, \\
(A \cap B) \cup C &= (A \cup C) \cap (B \cup C), \\
(A \cup B) \cap C &= (A \cap C) \cup (B \cap C),
\end{aligned}$$

wobei A, B, C Mengen sind.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Beweisen Sie jeweils mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2. \tag{3}$$

Aufgabe 3 **(4 Punkte)**

(a) Sei $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (|x-y+2| \leq 3) \wedge (4x+2<2)\}$. Skizzieren Sie A.

(b) Sei B das von den Punkten $(0,0)$, $(0,1)$ und $(1,0)$ ausgespannte Dreieck (mit Innerem und Kanten). Beschreiben Sie B mit Hilfe von Ungleichungen.

(c) Sei $C := \{(t\cos t, t\sin t) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t > 0\}$. Skizzieren Sie C.

(d) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, (y \leq |\cos x|)\}$. Skizzieren Sie D.

Denken Sie daran Ihre Ergebnisse zu begründen!

Aufgabe 4 **(3 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

(a) $f_1 \,:\, \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \sin x$,

(b) $f_2 \,:\, \mathbb{R} \to [0,\infty) \,:\, x \mapsto x^2$,

(c) $f_3 \,:\, [0,\infty) \to \mathbb{R} \,:\, x \mapsto \sqrt{x}$.

Überprüfen Sie, welche dieser Funktionen injektiv, surjektiv und bijektiv sind.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Schränken Sie den Definitions- und Bildbereich der Funktionen f_1, f_2 und f_3 aus Aufgabe 4 sinnvoll so ein, dass die Funktionen bijektiv werden. Geben Sie die Umkehrfunktionen samt Definitions- und Wertebereich an.

Hinweis:

Den aktuellen Aufgabenzettel und das aktuelle Kapitel des Kurzskripts findet Ihr immer Donnerstag nach der Vorlesung unter der folgenden Adresse:
`http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/Teaching/scripts/hm1_WS00_01/`
Wem dies zu kompliziert zu merken ist, der kann diese Seite auch ausgehend von `http://www.mathematik.uni-freiburg.de` durch Klicken auf `Institut für Angewandte Mathematik`, dann `Lehre`, nun `Vorlesungsskripte/Übungsblätter` und anschließend auf `Mathematik für Ingenieure und Physiker I` erreichen.