Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 26.10.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 2

Abgabe: **Donnerstag, 2.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $P := (1, 0)$ ein Punkt in der Ebene (mit kartesischen Koordinaten). Drehen Sie die Ebene um den Nullpunkt erst um den Winkel α und anschliessend um den Winkel β. Berechnen Sie jeweils die neuen Koordinaten von P. Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit einer Drehung der Ebene um den Winkel $\alpha+\beta$. Leiten Sie daraus eine Formel für $\sin(\alpha+\beta)$ und $\cos(\alpha+\beta)$, die sogenannten Additionstheoreme, her.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei folgendes Parallelogramm

Zeigen Sie, dass gilt: $2a^2 + 2b^2 = c^2 + d^2$, d.h. die Summe der Quadrate der Seiten ist gleich der Summe der Quadrate der Diagonalen. Dies ist die sogenannte Parallelogrammgleichung. Repräsentieren Sie hierfür $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ durch Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ und versuchen Sie a^2, b^2, c^2 und d^2 mit Hilfe von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ auszudrücken.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Beweisen Sie:

(a) **Entwicklungssatz:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\,\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\,\vec{c}$,

(b) **Jakobi-Identität:** $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) = 0$,

(c) **Lagrange-Identität:** $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Gegeben seien die folgenden Vektoren:

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{d} := \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Projektionen von $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ auf $\vec{a}$.

Aufgabe 5 **(4 Punkte)**

Skizzieren und charakterisieren Sie folgende Mengen in der Ebene:

(a) $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; \sqrt{(x-3)^2+y^2} + \sqrt{(x+3)^2+y^2} \leq 10\right\}$,

(b) $B := \left\{\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right) \in \mathbb{R}^2 \;:\; t \in \mathbb{R}\right\}$.