Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 16.11.2000

Mathematematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 5

Abgabe: **Donnerstag, 23.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, mit $n \geq 1$, monoton fallend ist.

(b) Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt: $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass $\tilde{e} = e$ ist, mit $\tilde{e} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ und $e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Aufgabe 2 **(3 Punkte)**

Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Überprüfen Sie die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

Aufgabe 3 **(6 Punkte)**

Untersuchen Sie die folgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert

$$a_n := \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}, \qquad b_n := \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right),$$

$$c_n := \frac{n!}{10^n}, \qquad d_n := \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \tfrac{1}{k^2}\right).$$

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Es seien $(a_n)_{n\geq 0}$ und $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Die Folgen $(c_n)_{n\geq 0}$ und $(d_n)_{n\geq 0}$ seien definiert durch

$$c_n := \min(a_n, b_n), \qquad d_n := \max(a_n, b_n).$$

Zeigen Sie, dass auch $(c_n)_{n\geq 0}$ und $(d_n)_{n\geq 0}$ konvergent sind und dass für ihre Grenzwerte gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \min(a, b)$ und $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \max(a, b)$.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Nullfolge. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

eine Nullfolge ist.

Aufgabe 6 **(4 Punkte)**

Seien p und q Polynome vom Grad r bzw. s mit $r, s \geq 0$, d.h. $p(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i x^i$ und $q(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i$ mit $a_r, b_s \neq 0$. Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ sei gegeben durch

$$c_n := \frac{p(n)}{q(n)} = \frac{\sum_{i=0}^{r} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{s} b_i n^i}.$$

Zeigen Sie:

(a) Ist $r < s$, so ist $(c_n)_{n\geq 0}$ eine Nullfolge.

(b) Ist $r = s$, so konvergiert $(c_n)_{n\geq 0}$ gegen $\frac{a_r}{b_s}$.

(c) Ist $r > s$, so divergiert $(c_n)_{n\geq 0}$ gegen ∞, falls $\frac{a_r}{b_s}$ positiv ist, und gegen $-\infty$, falls $\frac{a_r}{b_s}$ negativ ist.

Hinweis: Natürlich kann es vorkommen, dass $q(n) = 0$ ist und damit c_n nicht wohldefiniert ist. Da jedoch jedes Polynom nur endlich viele Nullstellen besitzt, kann dies nur endlich oft vorkommen. Es gibt also ein $N \geq 0$, so dass $q(n) \neq 0$ für alle $n \geq N$. Strenggenommen müsste man also die Folge $(c_n)_{n\geq N}$ betrachten.