Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 23.11.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 6

Abgabe: **Donnerstag, 30.11.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Funktionen die Definitionsbereiche an und berechnen Sie die ersten Ableitungen:

$$f(x) := \left(\frac{x^2+1}{x+3}\right)^9, \qquad g(x) := 3\sin(x^2+1)\cdot\cos^2 x.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Sei $n \geq 1$ und $g : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0} : x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Untersuchen Sie g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Berechnen Sie die Ableitung von g. Hinweis:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Seien

$$f(x) := \begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Skizzieren oder plotten Sie f und g. Untersuchen Sie f und g auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $m \geq 1$. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\right), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x}, \quad \lim_{n\to\infty}\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\sum_{i=0}^{n} i^2\right).$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Seien f und g jeweils n-mal differenzierbar an der Stelle a, wobei $n \geq 1$ und $a \in \mathbb{R}$ ist. Beweisen Sie die **Leibnizsche Produktregel**, d.h.

$$(f\cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(a)g^{(k)}(a).$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Seien $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_1|^n + \cdots + |a_m|^n} = \max\{|a_1|, \ldots, |a_m|\}$.