Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

30.11.2000

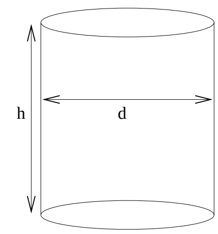
Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 7

Abgabe: **Donnerstag, 07.12.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (3 Punkte)

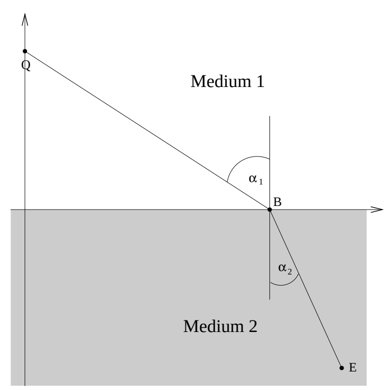
Als Konstrukteur/in einer Dosenfabrik haben Sie die Aufgabe erhalten 1-Liter-Dosen zu konstruieren. In Hinblick auf Produktion und Transport der Dosen müssen diese Zylinderform haben. Damit die Dosen nun möglichst kostengünstig hergestellt werden können, sollen Sie die Höhe und den Durchmesser bestimmen, bei denen am wenigsten Blech benötigt wird. (1 Liter entspricht 1000 cm^3.)



Aufgabe 2 (5 Punkte)

Leiten Sie nun analog zur Spiegelung von Licht (Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel) das Brechungsgesetz von Snellius her:

Der Versuchsaufbau sei wie in der Skizze. Weiterhin sei $Q = (0, a)$ (Quelle), $E = (L, -b)$ (Empfänger) und $B = (x, 0)$ (Brechungspunkt), wobei $a, b, L > 0$ gegeben sind. Bestimmen Sie nun x, so dass das Licht den schnellsten Weg einschlägt (Fermatsches Prinzip). Dabei seien v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten des Lichts im Medium 1 bzw. 2.



Leiten Sie hieraus das Brechungsgesetz $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$ her.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie folgende Grenzwerte ($a, b \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)-\sin(bx)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos(x)}-\sqrt{\cos(2x)}}{x^2}.$$

Tipp: Verwenden Sie die Regel von de l'Hospital.

Aufgabe 4 **(5 Punkte)**

Führen Sie eine Kurvendiskussion (siehe 2.14) für die Funktion $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$ durch.

Aufgabe 5 **(3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex. Weiterhin sei $n \geq 1$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie die **Ungleichung von Jensen**:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

In anderen Worten: Bei einer konvexen Funktion ist der Funktionswert des Mittelwertes kleiner gleich dem Mittelwert der Funktionswerte.