Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening

07.12.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 8

Abgabe: **Donnerstag, 14.12.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (Tschebyscheff–Polynome) (2+2+2+1+3=10 Punkte)

Pafnutij Tschebyscheff (1821 - 1894)

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) := \cos(nx).$$

Zeigen Sie, dass f_n bzgl. $\cos(x)$ ein Polynom vom Grad n ist, d.h. es existieren Polynome $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad n, so dass $\cos(nx) = p_n(\cos(x))$ gilt. Geben Sie $p_0, \dots, p_4$ an. (Hinweis: Blatt 4 Aufgabe 1.)

(b) Üblicherweise schränkt man den Definitionsbereich der p_n auf das Intervall $[-1, 1]$ ein. Für $x \in [-1, 1]$ gilt nämlich

$$p_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Die Einschänkung der p_n auf das Intervall $[-1, 1]$ bezeichnen wir im Folgenden mit T_n. Die T_n sind die sogenannten **Tschebyscheff–Polynome**. Bestimmen Sie die Extremstellen und den Wertebereich von T_n für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(c) Verifizieren Sie folgende Rekursionsformel:

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x) \qquad \text{für alle } x \in [-1, 1], n \geq 1.$$

Schließen Sie daraus, dass $2^{1-n} T_n$ für $n \geq 1$ ein normiertes Polynom ist, d.h. der führende Koeffizient ist Eins.

Hinweis: $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos(\alpha) \cos(\beta)$.

(d) Für eine stetige Funktion $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definieren wir:

$$\|g\|_\infty := \max_{x \in [-1,1]} |g(x)|.$$

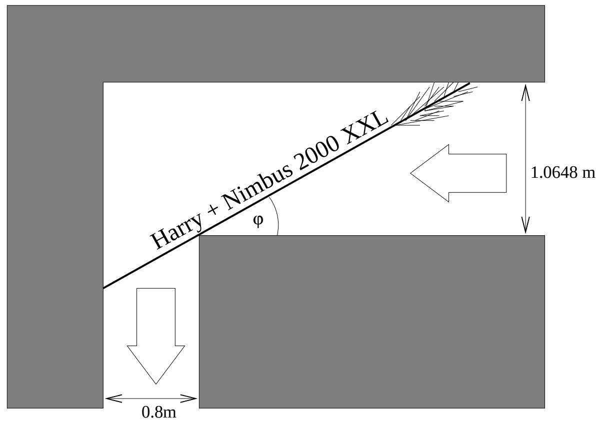
Berechnen Sie $\|T_n\|_\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(e) Sei $n \geq 0$. Beweisen Sie, dass es kein normiertes Polynom $q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ vom Grad n gibt, so dass $\|q\|_\infty < \|2^{1-n} T_n\|_\infty$ gilt.

Hinweis: Versuchen Sie für $n \geq 1$ einen Widerspruchsbeweis. Nehmen Sie an es gäbe ein Polynom $q : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ vom Grad n, mit $\|q\|_\infty < \|2^{1-n} T_n\|_\infty$. Wieviele Vorzeichenwechsel hat dann $q - 2^{1-n} T_n$? Schließen Sie hieraus eine Widerspruch.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Harry hat im Turm der Slytherins einen Streich gespielt, doch plötzlich erscheint Malfoy mit seinen Freunden. Harry bleibt nichts anderes übrig, als mit seinem fliegenden Besen, dem Nimbus 2000 XXL, abzuhauen. Leider sind die Gänge im Slytherinturm furchtbar eng und Harry schwebt plötzlich vor der folgenden Ecke:



(a) Wie lang muss der Nimbus 2000 XXL sein, damit er genau bei dem Winkel φ verkantet. (Der Besen muss dabei waagrecht in der Luft liegen.) Diese Länge bezeichnen wir mit $l(\varphi)$.

(b) Skizzieren Sie $l(\varphi)$ für $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

(c) Wie lange dürfte der Nimbus 2000 XXL höchstens sein, damit er nicht verkantet? Kann Harry auf seinem $2,50\,m$ langen Besen entkommen?

Aufgabe 3 **(3 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3 - 99x + 1$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f mit Hilfe des Newton–Verfahrens, so dass der Fehler kleiner als 10^{-5} ist. Begründen Sie, warum die Voraussetzungen für das Verfahren erfüllt sind. Sie dürfen ausnahmsweise mit dem Taschenrechner rechnen.
Hinweis: Ermitteln Sie zunächst passende Intervalle, in denen jeweils genau eine Nullstelle liegt. Dies kann man z.B. durch Skizze oder durch Einsetzen ganzzahliger Werte mit Hinblick auf Vorzeichenwechsel machen.

Aufgabe 4 **(2 Punkte)**

Für $n \geq 1$ seien $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ differenzierbar. Sei $g := f_1 \cdots f_n$ deren Produkt. Weiterhin sei x_0 ein Extremum vom g. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{f_1'(x_0)}{f_1(x_0)} + \cdots + \frac{f_n'(x_0)}{f_n(x_0)} = 0.$$

Hinweis: Betrachen Sie $\ln(g(x))$.