Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 14.12.2000

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 9

Abgabe: **Donnerstag, 21.12.2000** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 **(2 Punkte)**

Seien $0 < a < b$. Berechnen Sie $\int_a^b x \ln^2 x \, dx$.

Aufgabe 2 **(5 Punkte)**

Sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto x^x$. Berechnen Sie die Ableitung f'. Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ und $\lim_{x \to 0^+} f'(x)$ existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls. Bestimmen Sie den Wertebereich von f. Prüfen Sie f auf Konvexität.

Aufgabe 3 **(5 Punkte)**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ stetig und differenzierbar ist.

(b) Sei $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{x \to 0^+} q\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

gilt. (Tipp: Benutzen Sie de l'Hospital.)

(c) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar ist und dass es zu jedem $k \in \mathbb{N}_0$ ein Polynom $q_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit

$$f^{(k)}(x) := \begin{cases} q_k\left(\tfrac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

(Tipp: Vollständige Induktion. Benutzen Sie (b) bei Induktionsschritt.)

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

Machen Sie ein Kurvendiskussion der Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - 1}$.

Aufgabe 5 **(2 Punkte)**

Beweisen Sie die Additionstheoreme für $\sinh(\alpha + \beta)$ und $\cosh(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 6 **(2 Punkte)**

Bestimmen Sie die Ableitungen von $(x^x)^x$ und $x^{(x^x)}$ für $x > 0$.