Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 25.01.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 13

Abgabe: **Donnerstag, 01.02.2001** (vor der Vorlesung)

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf bedingte und absolute Konvergenz:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{-n} \quad \text{mit } k \in \mathbb{N} \text{ fest},$$

$$C := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}, \qquad D := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}},$$

$$E := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}, \qquad F := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}.$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie mit Hilfe der geometrischen Reihe, dass die folgenden Reihen für alle $x \in (-1,1)$ absolut gegen die nebenstehenden Werte konvergieren:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \qquad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k, \qquad \frac{1}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}.$$

(b) Aufgrund der Identität

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x},$$

lässt sich die dritte Reihe als Summe (mit Vorfaktor 1/2) und als Produkt der ersten beiden Reihen darstellen. Verifizieren sie an diesem Beispiel die Rechenregeln für unendliche Reihen, d.h. Addition und Cauchyprodukt von unendlichen Reihen.

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Berechnen Sie den Konvergenzradius der folgenden Reihen:

$$A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} x^n, \qquad B := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+2^n} x^{5n}, \qquad C := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)^n}{n!} x^n.$$

Untersuchen Sie das Verhalten der Reihen auf dem Rand des Konvergenzkreises. (Tipp für den rechten Rand bei C: Sie dürfen die Stirlingsche Formel benutzen, welche besagt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2\pi n}(n/e)^n/n! = 1$ ist.)