Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. M. Růžička
Dipl.-Math. L. Diening 08.02.2001

Mathematik für Ingenieure und Physiker I

WS 2000/01 — Blatt 15 — Musterlösung

Aufgabe 1 **(4 Extra–Punkte)**

Bilden Sie soweit möglich die Produkte $A \cdot B$ und $B \cdot A$ für

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ und $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

(b) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 17 & 26 \\ 7 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$. Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert.

Aufgabe 2 **(2 Extra–Punkte)**

Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Beweis durch vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich richtig.
Induktionsschritt $(n \mapsto n+1)$*:*

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{nach Induktionsvoraussetzung} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & (n+1)a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Damit ist die Aufgabe durch vollständige Induktion bewiesen.

Aufgabe 3 **(4 Extra–Punkte)**

(a) Geben Sie die allgemeine Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ an:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & 2x_4 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & - & x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ 4x_1 & & & & & - & 6x_4 & + & 3x_5 & = & 0\,. \end{array}$$

(b) Bringen Sie das folgende Gleichungssystem auf Stufenform und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2 \end{array}\right).$$

Lösung:
Wir wenden das Eliminationsverfahren an!

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} \cdot\frac{1}{2}; & \\ ; & -2\times\text{Gl. } 1 \\ ; & -4\times\text{Gl. } 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} ; & -\frac{1}{2}\times\text{Gl. } 2 \\ ; & \\ ; & +2\times\text{Gl. } 2 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ll} ; & +\frac{1}{2}\times\text{Gl. } 3 \\ ; & \\ \cdot\frac{1}{2}; & \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-3}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Die Buchführungsmenge ist $B = \{1, 2, 3\}$. Damit werden zwei Parameter für die Darstellung der Lösungen benötigt. Seien also $r, s \in \mathbb{R}$ zwei freie Parameter, dann sind die Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5$ beschrieben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{3}{2}r - \tfrac{3}{4}s, \\ x_2 &= r - s, \\ x_3 &= \tfrac{1}{2}s, \\ x_4 &= r, \\ x_5 &= s. \end{aligned}$$

Man kann die Lösungsmenge auch folgendermaßen schreiben:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ r \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; r, s \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Lin}\big(\{(\tfrac{3}{2}, -1, 0, 1, 0,)^T, (-\tfrac{3}{4}, 1, -\tfrac{1}{2}, 0, 0, 1)^T\}\big). \end{aligned}$$

(b)

$$
\left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ -2 & 6 & 2 & 8 & 2 & 12 & 0 \\ 3 & 9 & -3 & -12 & -1 & -14 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rl} ; & \\ ; & +2\times\text{Gl. } 1 \\ ; & -3\times\text{Gl. } 1 \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{rrrrrr|r} 1 & 3 & -2 & -8 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 12 & -2 & -8 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & -4 & 7 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rl} ; & -3\times\text{Gl. } 2 \\ \cdot\frac{1}{12}; & \\ ; & \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & \frac{-3}{2} & -6 & 0 & \frac{-13}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{6} & \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & -4 & 7 & 2 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rl} ; & +\frac{3}{2}\times\text{Gl. } 3 \\ ; & +\frac{1}{6}\times\text{Gl. } 3 \\ \cdot\frac{1}{3}; & \end{array}
$$

$$
\to \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \frac{-4}{3} & \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)
$$

Die Buchführungsmenge ist $B = \{1, 2, 3\}$. Als spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems wählen wir $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T = (1, \frac{1}{9}, \frac{2}{3}, 0, 0, 0)^T$. Für die Lösung des homogenen Gleichungssystems werden drei Parameter benötigt. Seien also $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ drei freie Parameter, dann sind die Lösungen $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^T \in \mathbb{R}^6$ des homogenen Gleichungssystems beschrieben durch

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 2r_2 + 3r_3, \\
x_2 &= -\tfrac{1}{9}r_2 - \tfrac{2}{9}r_3, \\
x_3 &= -4r_1 + \tfrac{4}{3}r_2 - \tfrac{7}{3}r_3, \\
x_4 &= r_1, \\
x_5 &= r_2, \\
x_6 &= r_3.
\end{aligned}
$$

Dies ergibt die folgenden Lösungen des inhomogene Gleichungssystems

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 2r_2 + 3r_3, \\
x_2 &= \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{9}r_2 - \tfrac{2}{9}r_3, \\
x_3 &= \tfrac{2}{3} - 4r_1 + \tfrac{4}{3}r_2 - \tfrac{7}{3}r_3, \\
x_4 &= r_1, \\
x_5 &= r_2, \\
x_6 &= r_3.
\end{aligned}
$$

Man kann die Lösungsmenge auch folgendermaßen schreiben:

$$
\begin{aligned}
L &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{9} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{2}{9} \\ -\frac{7}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R} \right\} \\
&= (1, \tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{3}, 0, 0, 0)^T \\
&\quad + \operatorname{Lin}\big(\{(0, 0, -4, 1, 0, 0)^T, (2, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{4}{3}, 0, 1, 0)^T, (3, -\tfrac{2}{9}, -\tfrac{7}{3}, 0, 0, 1)^T\}\big).
\end{aligned}
$$