Mathematik für Ingenieure und Physiker I

Kurzskript

Wintersemester 2000/01

Prof. Dr. Michael Růžička

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Zahlen und Vektoren

Ein wesentliches Ziel dieses Kapitels ist es verschiedene Begriffe und Bezeichnungen, die im Weiteren benötigt werden, zu definieren und einzuführen. Vieles ist dabei bereits aus der Schule bekannt. Insbesondere soll eine Klarstellung und Vereinheitlichung der Notation erreicht werden.

1.1 Mengen und Abbildungen

1.1 Definition. *Eine* **Menge** *ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen.*

Bezeichnungen:

- Objekte der Mengen heißen **Elemente**.

$$\begin{aligned} a \in A, &\qquad a \text{ ist Element von } A\,, \\ a \notin A, &\qquad a \text{ ist kein Element von } A\,. \end{aligned}$$

- Beschreibung einer Menge X durch Angeben einer definierenden Eigenschaft

$$X := \{x \in A; x \text{ hat die Eigenschaft } E\}\,.$$

- Die **leere Menge** $\emptyset$ enthält kein Element.

- B heißt **Teilmenge** von A, wenn jedes Element von B auch ein Element von A ist

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \big(b \in B \Rightarrow b \in A\big)\,.$$

- B heißt **echte Teilmenge** von A, in Zeichen $B \subsetneq A$, wenn $B \subseteq A$, und es ein $x \in A$ gibt mit $x \notin B$.

1.2 Definition. *Eine* **Aussage** *ist ein sinnvolles sprachliches Gebilde, dass entweder wahr oder falsch ist.*

- Aussagen kann man miteinander verknüpfen. Diese Verknüpfungen werden in **Wahrheitstabellen** definiert. Es gibt:
  Negation $\neg A$, **Konjunktion** $A \wedge B$, **Alternative** $A \vee B$,
  Implikation $A \Rightarrow B$, **Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
W	W	F	W	W	W	W
W	F		F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F		F	F	W	W

- **Existenzquantor** $\exists$

$$\exists\, x \in A : E$$

  heißt: es existiert ein x aus A mit der Eigenschaft E.

- **Generalisationsquantor** $\forall$

$$\forall\, x \in A : E$$

  heißt: alle a aus A haben die Eigenschaft E.

1.3 Mengenoperationen. *Seien $A, B \subseteq M$ zwei Teilmengen von M. Dann definieren wir folgende Verknüpfungen:*

$$\begin{array}{lrl}
\textbf{Durchschnitt} & A \cap B & := \{x \in M; (x \in A) \wedge (x \in B)\}\,, \\
\textbf{Vereinigung} & A \cup B & := \{x \in M; (x \in A) \vee (x \in B)\}\,, \\
\textbf{Differenz} & A \backslash B & := \{x \in M; (x \in A) \wedge (x \notin B)\}\,, \\
\textbf{Komplement} & A^{\complement} & := \{x \in M; x \notin A\}\,.
\end{array}$$

- Mengen heißen **disjunkt**, wenn sie kein gemeinsames Element haben.

- Die **Produktmenge** $A \times B$ zweier Mengen A, B ist definiert durch

$$A \times B := \{(a, b);\ (a \in A) \wedge (b \in B)\}\,,$$

  d.h. sie ist die Menge der geordneten Paare.

- $A \times B$ ist eine neue Menge. Zwei Elemente $(a, b), (c, d)$ sind gleich, in Zeichen $(a, b) = (c, d)$, genau dann wenn $(a = c) \wedge (b = d)$.

- Analog definiert man für mehrere Mengen $A_i, i = 1, \dots, n$,

$$A_1 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, \dots, a_n);\ a_i \in A_i, i = 1, \dots, n\} .$$

  $(a_1, \dots, a_n)$ heißt **geordnetes n-Tupel**. Falls $A_1 = \cdots = A_n = A$ schreibt man

$$A^n \quad \text{statt} \quad \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n-mal}$$

1.4 Definition. *Seien A, B Mengen. Eine* **Funktion** *oder* **Abbildung** *von A nach B ist eine Teilmenge f der Produktmenge $A \times B$ derart, dass zu jedem $x \in A$ genau ein $y \in B$ existiert mit $(x, y) \in f$.*

Bezeichnungen:

- Statt $(x, y) \in f$ schreibt man $y = f(x)$ oder $f : A \to B : x \mapsto f(x)$.
  $y = f(x)$ nennt man den **Funktionswert von f an der Stelle** x.

- A heißt **Definitionsbereich von** f, in Zeichen $D(f) := A$.

- Sei $C \subseteq A$, dann ist das **Bild von** C **unter** f definiert durch

$$f(C) := \{f(x);\ x \in C\} .$$

  Insbesondere heißt $f(A)$ **Wertebereich von** f.

- Eine Funktion $f : A \to B$ heißt

$$\begin{aligned}
\textbf{surjektiv} \ &\Leftrightarrow\ f(A) = B \quad \text{(Wertebereich ist gesamte Menge } B) ,\\
\textbf{injektiv} \ &\Leftrightarrow\ (x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ f(x_1) \neq\ f(x_2))\\
&\ \ \text{(verschiedene Argumente haben verschiedene Bilder)},\\
\textbf{bijektiv} \ &\Leftrightarrow\ \text{injektiv und surjektiv} .
\end{aligned}$$

- Sei $f : A \to B$ bijektiv, dann ist die **Umkehrabbildung** f^{-1} definiert als

$$f^{-1} := \{(f(x), x);\ x \in A\} .$$

- Die **identische Abbildung** ist gegeben durch

$$\text{id} :\ A \to A :\ x \mapsto x$$

- **Gleichheit von zwei Abbildungen:** Seien $f : A \to B\,, g : C \to D$ zwei Abbildungen. Es gilt:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \big((A = C) \wedge (B = D) \wedge (\forall x \in A: \; f(x) = g(x))\big)\,.$$

- Die **Restriktion** einer Funktion $f : A \to B$ auf $A_0 \subset A$ ist definiert durch:

$$f|_{A_0} := \{(x, f(x)); x \in A_0\}\,.$$

1.2 Reelle Zahlen

Bezeichnungen:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	**natürliche Zahlen**
$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$	
$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	**ganze Zahlen**
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$	**rationale Zahlen**
$\mathbb{R}$	**reelle Zahlen**

Die **reellen Zahlen** werden axiomatisch eingeführt. Man betrachtet eine Menge auf der zwei Operationen $+, \cdot$ definiert sind. Weiterhin müssen die Körperaxiome, die Ordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom erfüllt sein. Die Körperaxiome sichern, dass man wie gewohnt addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren kann. Die Ordnungsaxiome sichern, dass man zwei beliebige reelle Zahlen der Größe nach vergleichen kann, d.h. es gilt immer genau eine der Möglichkeiten:

$$x < y\,, \qquad x = y\,, \qquad x > y\,.$$

Man schreibt

$$x \leq y \Leftrightarrow (x < y) \vee (x = y)\,.$$

Die Ordnungsrelation $\leq$ ist kompatibel mit den Operationen $\cdot, +$ und es gilt:

$$\begin{aligned} x \leq y, a \leq b \quad &\Rightarrow \quad a + x \leq b + y\,, \\ x \leq y, a \geq 0 \quad &\Rightarrow \quad a \cdot x \leq a \cdot y\,, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad -y \leq -x\,, \\ 0 < x \leq y \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \tfrac{1}{y} \leq \tfrac{1}{x}\,. \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.3 Definition. *Sei $S \subseteq \mathbb{R}$. S heißt* **nach oben beschränkt**, *wenn es eine Zahl $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass*

$$\forall x \in S: \quad x \leq b\,.$$

Man nennt b eine **obere Schranke** *von S.*

- Analog definiert man die Begriffe **nach unten beschränkt** und **untere Schranke**.
- S heißt **beschränkt**, falls S eine obere und eine untere Schranke besitzt.

2.4 Axiom. *Jede nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt eine kleinste obere Schranke.*

- Die kleinste obere Schranke heißt **Supremum**. Sei $S \subseteq \mathbb{R}$ nach oben beschränkt. Dann setzt man

$$s := \sup S \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in S : s - \varepsilon < x \leq s$$

- Die größte untere Schranke, nennt man **Infimum**.

2.5 Definition. *Der* **Betrag** $|a|$ *einer reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist definiert durch*

$$|a| = \begin{cases} a & \textit{falls } a \geq 0, \\ -a & \textit{falls } a < 0. \end{cases}$$

- Aus der Definition ergeben sich folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} -|a| \leq a \leq |a|\,, \\ |-a| = |a|\,, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} |ab| &= |a||b|\,, \\ \left|\frac{a}{b}\right| &= \frac{|a|}{|b|} \qquad \text{falls } b \neq 0\,, \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$|a| \leq b \quad \Leftrightarrow \quad -b \leq a \leq b\,. \tag{2.8}$$

- Aus (2.6) und (2.8) folgt die **Dreiecksungleichung**: $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a + b| \;\leq |a| + |b|\,. \tag{2.9}$$

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann wird mit $|a - b|$ der **Abstand** der zu a und b gehörigen Punkte auf der Zahlengeraden bezeichnet. Also gilt für $a, x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$:

$$|a - x| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$$

2.10 Intervalle. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann definiert man:*

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}; \quad a \leq x \leq b\} \qquad &\textbf{abgeschlossenes Intervall},\\ (a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}; \quad a < x < b\} \qquad &\textbf{offenes Intervall}. \end{aligned}$$

- analog: halboffene Intervalle $(a, b], [a, b)$
- Zum Vermeiden von Fallunterscheidungen führen wir $-\infty, \infty$ ein und legen fest: $\quad -\infty < x < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R};\ x \leq a\}\,, \\ (b, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R},\ x > b\}\,, \\ \mathbb{R} &= (-\infty, \infty)\,. \end{aligned}$$

  Also ist $\mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

- Das offenes Intervall $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ heißt $\boldsymbol{\varepsilon}$ **- Umgebung** von a.

2.11 vollständige Induktion. *Aussagen oder Eigenschaften können von Elementen einer Menge A abhängen, z.B.*

$$\forall n \in A : \ E(n)\,.$$

Falls $A = \{n_0, n_0 + 1, \dots\} \subseteq \mathbb{Z}$ kann man den Wahrheitsgehalt solcher Aussagen mit vollständiger Induktion beweisen, d.h.

1) Induktionsbegin: *Man zeigt, dass $E(n)$ für $n = n_0$ gilt.*

2) Induktionsschritt: *Für beliebiges $n \geq n_0$ setzt man die Gültigkeit von $E(n)$ voraus* **(Induktionsvoraussetzung)** *und leitet daraus die Gültigkeit von $E(n+1)$ her.*

- **Bernoulli - Ungleichung:**

$$\forall h \in (-1, \infty), \ \forall n \in \mathbb{N} : \ (1 + h)^n \geq 1 + nh \tag{2.12}$$

Auf der vollständigen Induktion beruht auch das Verfahren der **Definition durch Rekursion**.

- Sei $a \in \mathbb{R}$. Die **Potenzen** a^n, für $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch:

  (1) $a^0 := 1$

  (2) $a^{n+1} := a^n \cdot a$

- Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann ist **Fakultät** $n!$ definiert als:

  (1) $0! := 1$

  (2) $(n+1)! := (n+1)n!$

- **Summen- und Produktzeichen** Seien $a_i \in \mathbb{R}$, $m \leq n \in \mathbb{N}_0$, $i = m, \dots, n$, $m \leq n \in \mathbb{N}_0$. Dann definieren wir:

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$
$$\prod_{i=m}^{n} a_i := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n$$

- Es gilt die Ungleichung:

$$\Big|\sum_{i=m}^{n} a_i\Big| \leq \sum_{i=m}^{n} |a_i| \,. \tag{2.13}$$

- Für die endliche **geometrische Reihe** gilt:

$$\sum_{z=0}^{n} q^\theta = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \qquad \text{falls } q \neq 1\,. \tag{2.14}$$

2.15 Definition. *Für ganze Zahlen n, k mit $0 \leq k \leq n$ ist der* **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{k}$ *definiert durch*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,.$$

• Eine **Permutation** ist eine bijektive Abbildung einer endlichen Menge A auf sich selbst.

2.16 Lemma. *Zu jeder Menge mit n Elementen gibt es genau $n!$ Permutationen.*

2.17 Satz. *Eine Menge mit n Elementen besitzt $\binom{n}{k}$ verschiedene k-elementige Teilmengen.*

- Für Binomialkoeffizienten gilt die Rekursionsformel:
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}, \tag{2.18}$$
und folgende Rechenregeln:
$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$$

- Mit Hilfe von (2.18) kann man die Binomialkoeffizienten nur durch Addition berechnen, man erhält das **Pascalsche Dreieck:**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & \binom{0}{0} & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\ & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\ \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \end{array}$$

2.19 Satz (Binomische Formel). *Für reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:*
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

1.3 Die Ebene

Wir haben zwei zweidimensionale Objekte
$$\mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \qquad \text{Ebene } E \cong \text{Zeichenebene}.$$

Diese beiden Objekte wollen wir in Zusammenhang bringen. Dazu kann man das **Kartesische Koordinatensystem** benutzen, d.h.

- Man gibt den Punkt 0 vor,
- nimmt eine Zahlengerade, die x-**Achse**, so dass ihr Nullpunkt mit dem Punkt 0 übereinstimmt.
- Nun dreht man die x-Achse gegen den Uhrzeigersinn um 90^o und erhält die y-**Achse**.
- Für einen beliebigen Punkt $P_0 \in E$, fällt man das Lot auf die x- und die y-Achse und erhält die x-**Koordinate** x_0 und die y-**Koordinate** y_0 von P_0. Man schreibt
$$P = (x_0, y_0)\,.$$
Der Punkt $0 = (0, 0)$ heißt **Ursprung**.

Durch dieses Vorgehen haben wir eine bijektive Zuordnung von Punkten $P \in E$ und Zahlenpaaren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erhalten. Man kann also Teilmengen im $\mathbb{R}^2$ als Punktmengen in E veranschaulichen und Gebiete in E mit Hilfe von Gleichungen beschreiben.

- Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Menge
$$G_f := \{(x, y);\, x \in I, y = f(x)\}$$
heißt **Graph der Funktion** f.
- Sei $C \subseteq E$ eine Kurve in E versehen mit einem Kartesischen Koordinatensystem. Sei $X = (x, y)$ ein Punkt auf der Kurve C. Falls man genau für die Punkte auf C eine Abhängigkeit $F(x, y) = 0$ aufstellen kann, d.h.
$$C = \{(x, y);\, F(x, y) = 0\}\,,$$
dann heißt $F(x, y) = 0$ die **Gleichung der Kurve** C und C heißt die **Lösungsmenge** der Gleichung $F(x, y) = 0$.

3.1 Winkel. *Ein Winkel α ensteht durch Drehung eines Zeigers um einen Punkt der Ebene.*

- *Die Länge des zugehörigen Einheitskreisbogens sei ℓ. Wir nennen ℓ das* **Bogenmaß von** *α, wenn die Drehung in positiver Richtung (gegen Uhrzeigersinn) erfolgte. Falls die Drehung in Urzeigersinn erfolgte ist $-\ell$ das Bogenmaß.*