- *Ein Winkel α habe das Gradmaß $(\alpha_0)^\circ$. Das Bogenmaß ℓ des Winkels α errechnet sich durch:*
$$\ell = \frac{\pi}{180^\circ}\,(\alpha_0)^\circ$$
- *Im Weiteren werden wir immer mit dem Bogenmaß arbeiten.*

3.2 Sinus, Cosinus. *Auf dem Einheitskreis drehe man einen Zeiger um den Winkel α. Dadurch zeigt der Zeiger auf den Punkt P. Die Koordinaten von P werden mit $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bezeichnet. Da der Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig ist erhalten wir die Funktionen:*

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} \to [-1,1] \,:\, \alpha \mapsto \cos\alpha \qquad & \textbf{Cosinusfunktion}\,, \\ \sin : \mathbb{R} \to [-1,1] \,:\, \alpha \mapsto \sin\alpha \qquad & \textbf{Sinusfunktion}\,. \end{aligned}$$

Der Zeiger habe nun die Länge r. Nach einer Drehung um den Winkel α zeigt er nun auf den Punkt $Q = (a,b)$. Dieser hat die Koordinaten

$$\begin{aligned} a &= r\cos\alpha\,, \\ b &= r\sin\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Diese Gleichungen kann man auch schreiben als

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{a}{r}\,, \\ \sin\alpha &= \frac{b}{r}\,. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.5 Cosinussatz. *Es gilt:*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\,\cos\alpha\,.$$

3.6 Sinussatz. *Es gilt:*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}\,.$$

• **Drehung des Koordinatensystems:** Sei (x,y) ein Kartesisches Koordinatensystem. Das Koordinatensystem (x',y') entstehe aus (x,y) durch Drehung um den Ursprung um den Winkel α.

3.7 Satz. *Hat ein Punkt $X \in E$ im ursprünglichen System die Koordinaten (x_0, y_0) und im gedrehten System die Koordinaten (x_0', y_0') so gelten die* **Transformationsformeln:**

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0' \cos\alpha - y_0' \sin\alpha\,, \\ y_0 &= x_0' \sin\alpha + y_0' \cos\alpha\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} x_0' &= x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha\,, \\ y_0' &= -x_0 \sin\alpha + y_0 \cos\alpha\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.10 Satz. *Sei $d : E \to E : (x, y) \mapsto (x', y')$ eine Drehung der Ebene um den Winkel α um den Ursprung. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} x' &= x \cos\alpha - y \sin\alpha\,, \\ y' &= x \sin\alpha + y \cos\alpha\,. \end{aligned}$$

1.4 Der Raum

Ähnlich wie im Abschnitt 1.3 kann man den $\mathbb{R}^3$ und den Anschauungsraum R miteinander identifizieren.

- **Kartesische Koordinaten** im Raum bestehen aus drei sich in einem Punkt 0 rechtwinklig schneidenden Zahlengeraden, die ein Rechtssystem bilden. Man nennt sie die x-, y-, z-Achsen.

- Die **Koordinatenebenen** sind die durch zwei Achsen aufgespannten Ebenen. Man nennt sie auch die (x, y)-, (x, z)- und (y, z)-Ebenen.

4.1 Vektoren. *Seien P, Q Punkte im Raum R. Es gibt genau eine Parallelverschiebung des Raumes, die P auf Q abbildet. Diese wird mit $\overrightarrow{PQ}$ bezeichnet und heißt* **„Vektor von P nach Q“**.

- *Unter $\overrightarrow{PQ}$ wird z.B. der Punkt S auf T abgebildet, d.h.*

  $$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{ST}\,.$$

  Also stellen zwei gleichlange, gleichgerichtete „Pfeile“ denselben Vektor dar.

- *Man schreibt oft kürzer $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$.*

4.2 Definition. *Seien $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{QR}$ Vektoren. Die zu $\overrightarrow{PQ}$ umgekehrte Parallelverschiebung $\overrightarrow{QP}$ bezeichnen wir mit $-\mathbf{\vec{a}}$. Die Parallelverschiebung die durch nacheinander Ausführen von $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{QR}$ entsteht bezeichen wir mit $\vec{a} + \vec{b}$ und nennen sie* **Summe** *der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.*

- Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{0} &= \vec{a}\,, \\ \vec{a} + (-\vec{a}) &= \vec{0}\,, \\ \vec{a} + \vec{b} &= \vec{b} + \vec{a}\,, \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) &= (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}\,. \end{aligned} \tag{4.3}$$

- Die Differenz zweier Vektoren wird erklärt durch:

$$\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b}) \tag{4.4}$$

4.5 Definition. *Die* **Länge** *bzw. die* **Norm** *eines Vektors $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ ist die Länge der Strecke $\overline{PQ}$. Man schreibt dafür $|\vec{a}|$ bzw. $\|\vec{a}\|$.*

- Für den **Nullvektor** $\vec{0} := \overrightarrow{PP}$ setzen wir $\|\vec{0}\| := 0$.

4.6 Definition. *Sei $\alpha \in \mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$ und $\vec{a}$ ein Vektor. Dann bezeichnet man mit $\alpha\,\vec{a}$ denjenigen Vektor der dieselbe Richtung wie $\vec{a}$ hat aber die α-fache Länge. Man nennt $\alpha\vec{a}$ das* **$\boldsymbol{\alpha}$-fache skalare Vielfache** *von $\vec{a}$. Sei $\alpha < 0$, dann setzen wir*

$$\alpha\,\vec{a} := -(|\alpha|\,\vec{a})$$

- Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned} \alpha\,(\beta\,\vec{a}) &= (\alpha\,\beta)\,\vec{a} \\ \alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) &= \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b} \\ (\alpha + \beta)\,\vec{a} &= \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a} \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} \|\alpha\,\vec{a}\| &= |\alpha|\,\|\vec{a}\| \\ \|\vec{a} + \vec{b}\| &\leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \end{aligned} \tag{4.8}$$

- Ein Vektor mit Norm 1 heißt **Einheitsvektor**. Sei $\vec{a} \neq \vec{0}$ ein Vektor, dann ist
$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$$
ein Einheitsvektor.

4.9 Definition. *Der Raum sei mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen. Die drei Einheitsvektoren in positiver x-, y- und z-Richtung werden mit $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ bezeichnet. Wir nennen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ eine* **kartesische Basis**.

- Sei $A = (a_1, a_2, a_3)$ ein Punkt im Raum. Der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ heißt **Ortsvektor** des Punkts A.

- Man sieht leicht, dass $\vec{a}$ eindeutig zerlegbar ist als Summe:
$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 \,.$$

- Man nennt a_i, $i = 1, 2, 3$, die **Koordinaten** des Vektors $\vec{a}$ und $a_i\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, die **Komponenten von $\vec{a}$ in Richtung $\vec{e}_i$**.

- Für ein festes kartesisches Koordinatensystem schreibt man abkürzend:
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3)^\top \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \overrightarrow{OA} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3 \tag{4.10}$$
falls $A = (a_1, a_2, a_3)$.

- Im allgemeinen Fall $\vec{a} = \overrightarrow{PQ}$ mit $P = (p_1, p_2, p_3)$ und $Q = (q_1, q_2, q_3)$ haben wir die **Koordinatendarstellung**
$$\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} . \tag{4.11}$$

- Aus (4.10), (4.11) erhählt man leicht die Koordinatendarstellung für Summen und skalare Vielfache. Sei $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i\vec{e}_i$ und

$\alpha \in \mathbb{R}$ dann gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} + \vec{b} &= \sum_{i=1}^{3} (a_i + b_i)\, \vec{e}_i \,, \\ \alpha\vec{a} &= \sum_{i=1}^{3} (\alpha\, a_i)\, \vec{e}_i \,. \end{aligned} \tag{4.12}$$

- Aus (4.10) und dem Satz des Pythagoras ergibt sich für $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i\vec{e}_i$:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{4.13}$$

1.5 Produkte

5.1 Winkel zwischen Vektoren. *Seien $\vec{a}, \vec{b}$ von Null verschiedene Vektoren und sei P ein beliebiger Punkt in Raum, an dem man beide Vektoren abträgt. Dann ist der kleinere der positiv gemessenen Winkel, den die „Pfeile "$\vec{a}$ und $\vec{b}$ im Scheitel P bilden, der* **Winkel zwischen** $\vec{a}$ **und** $\vec{b}$. *Man schreibt $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$. Der so definierte Winkel hat die folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{aligned} 0 \leq \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) &\leq \pi \,, \\ \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) &= \measuredangle(\vec{b}, \vec{a}) \,, \\ \measuredangle(\vec{a}, t\,\vec{a}) &= 0 \qquad\qquad \textit{falls } t > 0 \,, \\ \measuredangle(\vec{a}, t\,\vec{a}) &= \pi \qquad\qquad \textit{falls } t > 0 \,, \\ \measuredangle(-\vec{a}, \vec{b}) &= \pi - \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) \,. \end{aligned} \tag{5.2}$$

5.3 Definition. *Man nennt $\vec{a}$* **orthogonal** *zu $\vec{b}$ wenn $\measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ und schreibt $\vec{a} \perp \vec{b}$. Es gilt die folgende Konvention: Für alle Vektoren $\vec{a}$ gilt $\vec{a} \perp \vec{0}$.*

5.4 Definition. *Das* **Skalarprodukt** $\vec{a} \cdot \vec{b}$ *zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} := \begin{cases} \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) & \textit{falls } \vec{a} \neq 0 \wedge \vec{b} \neq \vec{0} \,, \\ 0 & \textit{falls } \vec{a} = \vec{0} \vee \vec{b} = \vec{0} \,. \end{cases}$$

- Für $\vec{e}_i, i = 1, 2, 3$, gilt:
$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad i, j = 1, 2, 3\,, \tag{5.5}$$
wobei das **Kronecher Symbol** δ_{ij} definiert ist als
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j\,, \\ 1 & \text{falls } i = j\,. \end{cases}$$

- Sei $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$, dann gilt:
$$a_i = \|\vec{a}\| \cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = \vec{a} \cdot \vec{e}_i\,,$$
und demzufolge
$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} (\vec{a} \cdot \vec{e}_i)\, \vec{e}_i\,. \tag{5.6}$$

- Es gelten folgende Rechenregeln:
$$\begin{array}{ll} a) & \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}\,, \\ b) & (\alpha\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})\,, \\ c) & (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}, \\ d) & \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \vec{a} \perp \vec{b}\,, \\ e) & \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\;. \end{array} \tag{5.7}$$

- Aus (5.7) b) & c) folgt:
$$\begin{aligned} &(\alpha_1 \vec{u}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{u}_n) \cdot (\beta_1 \vec{v}_1 + \ldots + \beta_m \vec{v}_m) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{v}_1 + \ldots + \alpha_n \beta_m \vec{u}_n \cdot \vec{v}_m \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i\, \beta_j\, \vec{u}_i\, \vec{v}_j\,. \end{aligned} \tag{5.8}$$

- Aus (5.8), (5.5) und den Koordinatendarstellungen $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i$ erhält man:
$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \sum_{i=1}^{3} a_i b_i\,, \\ \|\vec{a}\| &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\;. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \, \|\vec{b}\|} \qquad \text{falls } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}\,, \tag{5.10}$$

$$\cos \measuredangle(\vec{a}, \vec{e}_i) = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \qquad \text{falls } \vec{a} \neq \vec{0}\,. \tag{5.11}$$

5.12 Satz. *Seien $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ Vektoren. Dann besitzt $\vec{a}$ eine* **orthogonale Zerlegung** *längs $\vec{b}$ die gegeben ist durch*

$$\vec{a} = \vec{a}_{\vec{n}} + \vec{a}_{\vec{b}}, \tag{5.13}$$

wobei

$$\begin{aligned} \vec{a}_{\vec{b}} &:= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\, \vec{b}, \\ \vec{a}_{\vec{n}} &:= \vec{a} - \vec{a}_{\vec{b}}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Hierbei zeigt $\vec{a}_{\vec{b}}$ in Richtung $\vec{b}$ und $\vec{a}_{\vec{n}}$ steht senkrecht auf $\vec{b}$. $\vec{a}_{\vec{b}}$ heißt **Projektion von $\vec{a}$ auf $\vec{b}$**.

5.15 Vektorprodukt. *Seien $\vec{a}, \vec{b}$ zwei Vektoren. Das* **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$ *ist der Vektor mit den Eigenschaften:*

1) $\vec{a} \times \vec{b} := \vec{0}$ *falls $\vec{a} = \vec{0}$ oder $\vec{b} = \vec{0}$ oder $\vec{a}$ parallel zu $\vec{b}$ ist,*

2) sonst ist $\vec{a} \times \vec{b}$ derjenige Vektor,

   a) der senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht,

   b) mit dem $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b})$ ein Rechtssystem bildet,

   c) dessen Betrag gleich dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$, $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms ist.

- Für die kartesischen Basisvektoren gilt:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}\,, \\ \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 &= -(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1)\,, \\ \vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1 &= -(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2)\,, \\ \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2 &= -(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3)\,. \end{aligned} \tag{5.16}$$

- Es gelten folgende Rechenregeln:

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}\,, \qquad \vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})\,, \tag{5.17}$$

$$\alpha(\vec{a} \times \vec{b}) = (\alpha\,\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\alpha\,\vec{b})\,,$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})\,, \tag{5.18}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c})\,,$$

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\,\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2\,. \tag{5.19}$$

- Aus (5.18) und (5.19) folgt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}. \tag{5.20}$$

- (5.20) impliziert:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}. \tag{5.21}$$

- Aus (5.21), (5.13) und (5.14) folgt, dass die zu $\vec{b}$ orthogonale Komponente gegeben ist durch:

$$\vec{a}_{\vec{n}} = \frac{1}{\|\vec{b}\|^2}\,\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{b})\,. \tag{5.22}$$

5.23 Definition. *Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ Vektoren. Das* **Spatprodukt** *dieser Vektoren ist definiert durch:*

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] := \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})\,.$$

5.24 Satz. *Der von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannte Parallelepid (Spat) hat das Volumen*

$$V = |[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,]|\,.$$

• Seien $\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i$ und $\vec{c} = \sum_{i=1}^{3} c_i \vec{e}_i$. Dann folgt aus (5.20) und (5.9)

$$\begin{aligned} [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,] &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,)\,. \qquad \text{(siehe Kapitel 6)} \end{aligned} \tag{5.25}$$