1.6 Komplexe Zahlen

Bisher haben wir Punkte z der Ebene, die mit einem kartesischen Koordinatensystem versehen ist, als Zahlenpaare $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ aufgefasst. Jetzt schreiben wir den Punkt $z = (x, y)$ als

$$z := x + i\,y \tag{6.1}$$

und nennen dies eine **komplexe Zahl** mit **Realteil** $\operatorname{Re} z := x$ und **Imaginärteil** $\operatorname{Im} z := y$. Die x-Achse heisst **reelle Achse** und die y-Achse **imaginäre Achse**. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit

$$\mathbb{C} := \{x + i\,y; x, y \in \mathbb{R}\} \tag{6.2}$$

bezeichnet. Für zwei komplexe Zahlen $z = x+iy$, $w = u+iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ gilt:

$$z = w \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x = u) \wedge (y = v)\,. \tag{6.3}$$

6.4 Grundrechenarten in $\mathbb{C}$. *Seien $z = x + iy$, $w = u + iv$ mit $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ zwei komplexe Zahlen.*

- *Die* **Summe** *und die* **Differenz** *von z, w ist definiert als:*

$$\begin{aligned} z + w &:= (x + u) + i\,(y + v)\,, \\ z - w &:= (x - u) + i\,(y - v)\,. \end{aligned} \tag{6.5}$$

- *Die Zahl ix geht aus x durch Drehung um $\pi/2$ hervor. Die* **Multiplikation** *verallgemeinert dies. Wir definieren:*

$$z\,w := (xu - yv) + i\,(xv + yu)\,. \tag{6.6}$$

Insbesondere gilt also:

$$i^2 = -1\,. \tag{6.7}$$

- *Die* **Potenzen** *z^n sind rekursiv definiert durch:*

$$z^0 := 1\,, \qquad z^n := zz^{n-1}\,, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

- *Sei $w \neq 0$. Dann ist die* **Division** *definiert als:*

$$\frac{z}{w} = \frac{x+iy}{u+iv} := \frac{xu+yv}{u^2+v^2} + i\,\frac{yu-xv}{u^2+v^2}\,. \tag{6.9}$$

6.10 Definition. *Sei $z = x+iy$. Die zu z* **konjugierte komplexe Zahl** $\overline{z}$ *ist definiert durch:*

$$\overline{z} := x - i\,y\,.$$

- Wir haben folgende Rechenregeln für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{z+w} &= \overline{z} + \overline{w}\,, \\ \overline{zw} &= \overline{z}\,\overline{w}\,, \\ \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} &= \frac{\overline{z}}{\overline{w}}\,, \qquad \text{falls } w \neq 0\,, \end{aligned} \tag{6.11}$$

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z\,, \\ \operatorname{Re} z &= \tfrac{1}{2}(z+\overline{z})\,, \\ \operatorname{Im} z &= \tfrac{1}{2i}(z-\overline{z})\,. \end{aligned} \tag{6.12}$$

- Der **Betrag** $|z|$ von $z = x+iy$ ist definiert als:

$$|z| := \sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{6.13}$$

Es gelten die Recheneregeln:

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z\overline{z}}\,, \\ |zw| &= |z|\,|w|\,, \\ \left|\frac{z}{w}\right| &= \frac{|z|}{|w|}\,, \qquad \text{falls } w \neq 0\,, \\ |z| &= |\overline{z}|\,. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Die Dreiecksungleichung

$$|z+w| \leq |z| + |w| \tag{6.15}$$

kann durch Induktion auf n Summanden verallgemeinert werden

$$\Big|\sum_{i=1}^{n} z_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{n} |z_i|\,. \tag{6.16}$$

6.17 Qudaratische Gleichungen. *Die Gleichung* $x^2+1=0$ *hat in* $\mathbb{R}$ *keine Lösung. Allerdings sind* $x_{1,2}=\pm i$ *Lösungen in* $\mathbb{C}$*. Allgemeiner sei*

$$ax^2+bx+c=0\,,$$

mit $a,b,c\in\mathbb{R}$*,* $a\neq 0$ *eine quadratische Gleichung. Dann sind die Lösungen gegeben durch:*

$$x_{1,2}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\,, \tag{6.18}$$

wobei $d:=b^2-4ac$ *die* **Diskriminante** *ist. Im Falle* $d<0$ *setzen wir* $\sqrt{d}:=i\sqrt{-d}$*.*

Kapitel 2

Funktionen, Grenzwerte, Stetigkeit

In diesem Kapitel werden grundlegende Begriffe wie Funktionen und Grenzwerte eingeführt. Unter anderem werden Standardbeispiele für Funktionen, wie Polynome, Kreisfunktionen und die Exponentialfunktion, diskutiert. Der Grenzwertbegriff wird an Hand von Zahlenfolgen und Funktionen genauer betrachtet.

2.1 Grundbegriffe

In Definition (1.4) im Kapitel 1 wurden Funktionen für allgemeine Mengen definiert. Nun betrachten wir den Spezialfall einer **reellen Funktion einer Veränderlichen**

$$f:\ D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ :\ x \mapsto f(x)\,. \tag{1.1}$$

Beispiele:

1) Eine **lineare Funktion** ist gegeben durch

$$f(x) = ax + b$$

mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$.

2) Eine **quadratische Funktion** ist definiert als

$$f(x) = ax^2 + bx + c\,,$$

wobei $a \neq 0$ und der Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ ist.

3) Die **Wurzelfunktion** ist gegeben durch

$$f(x) = \sqrt{x}$$

mit dem Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R}\,,\ x \geq 0\}$.

1.2 Definition. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ symmetrisch zum Nullpunkt, d.h. $x \in D \Rightarrow -x \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt* **gerade** *(bzw.* **ungerade***) wenn $f(-x) = f(x)$ (bzw. $f(-x) = -f(x)$) für alle $x \in D$ gilt.*

1.3 Definition. *Man nennt eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$*

a) **monoton fallend** *(bzw.* **monoton wachsend***), wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ die Ungleichung $f(x_1) \geq f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) \leq f(x_2)$) gilt.*

b) **strikt monoton fallend** *(bzw.* **strikt monoton wachsend***), wenn für alle $x_1 < x_2 \in D$ die strikte Ungleichung $f(x_1) > f(x_2)$ (bzw. $f(x_1) < f(x_2)$) gilt.*

1.4 Rechnen mit Funktionen.

- *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen. Dann definiert man die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten dieser Funktionen durch:*

$$\begin{aligned} (f \pm g)(x) &:= f(x) \pm g(x) \\ (f \cdot g)(x) &:= f(x) \cdot g(x) \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}\,, \qquad \textit{falls } g(x) \neq 0 \end{aligned} \tag{1.5}$$

  d.h. die Operationen werden punktweise ausgeführt.

- *Zu Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ mit $g(D) \subset I$ kann man die* **Komposition** *$f \circ g : D \to \mathbb{R}$ bilden. Sie ist definiert durch:*

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)). \tag{1.6}$$

2.2 Polynome und rationale Funktionen

2.1 Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **Polynom vom Grad** n*, wenn es Zahlen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ gibt mit $a_n \neq 0$, so dass*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i. \tag{2.2}$$

- *Die a_i heißen* **Koeffizienten** *des Polynoms.*
- *$f(x) = 0$ hat keinen Grad, ist aber in der Sprechweise: „Polynome von Grad n" eingeschlossen.*

2.3 Satz. *Zwei Polynome sind genau dann gleich, wenn alle ihre Koeffizienten übereinstimmen, d.h.*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x^i = \sum_{i=1}^{n} b_i x^i \qquad \Leftrightarrow \qquad a_i = b_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

2.4 Horner Schema. *Sei x_0 konkreter Wert. Um den Funktionswert $f(x_0)$ in Darstellung (2.2) zu berechnen, braucht man $2n-1$ Multiplikationen und n Additionen. Es gibt andere Darstellungen als (2.2), z. B. die* **Horner–Darstellung***:*

$$f(x) = ((\cdots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \cdots + a_1)x + a_0\,. \tag{2.5}$$

Hier beträgt der Aufwand n Multiplikationen und n Additionen.

2.6 Satz. *Sei $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_n \neq 0$ und $b \in \mathbb{R}$. Für die Zahlen $c_n := a_n$, $c_{n-1} := c_n b + a_{n-1}$ bis $c_0 := c_1 b + a_0$ gilt*

$$\begin{aligned} f(b) &= c_0 \\ f(x) &= (x-b) \sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} + c_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

d.h. das Horner Schema enthält die Division von $f(x) - f(b)$ durch $x - b$.

2.8 Definition. *Als* **Nullstelle** *einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bezeichnet man jede Lösung der Gleichung*

$$f(x) = 0 \quad \text{in } D.$$

- *Für Polynome erhält man aus* (2.7)*:*

$$f(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = (x - b)h(x),$$

d.h. $f(x)$ *enthält den Linearfaktor* $(x - b)$.

- *Nun kann* $h(b)$ *wiederum* 0 *sein. In diesem Fall gibt es ein Polynom* h_1 *mit* $h(b) = (x - b)h_1(x)$*. Damit gilt:* $f(x) = (x - b)^2 h_1(x)$.

2.9 Definition. *Man nennt* $b \in \mathbb{R}$ *eine* **k-fache Nullstelle** *von* f *und man nennt* k *die* **Vielfachheit** *von* b*, wenn gilt:*

$$f(x) = (x - b)^k g(x) \quad \text{und} \quad g(b) \neq 0. \tag{2.10}$$

2.11 Satz.

a) *Sei* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ *ein Polynom vom Grad größer gleich eins. Sind* $b_1, \ldots, b_r$ *alle (verschiedenen) reellen Nullstellen von* f *mit der jeweiligen Vielfachheit* $l_1, \ldots, l_r$*, dann gilt*

$$f(x) = \prod_{i=1}^{r} (x - b_i)^{l_i} q(x) \tag{2.12}$$

mit einem Polynom $q(x)$ *vom Grad* $n - \sum\limits_{i=1}^{r} l_i$*, das in* $\mathbb{R}$ *keine Nullstellen hat.*

b) *Jedes Polynom vom Grad* n *mit* $n \geq 1$ *hat höchstens* n *Nullstellen.*

2.13 Komplexe Polynome. *Betrachten wir komplexe Polynome:*

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i, \qquad a_i \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$

- Alle Operationen, wie Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, die für reelle Polynome definiert sind, werden analog für komplexe Polynome definiert.

- Der Grund für die Einführung der komplexe Zahlen war das Polynom $x^2 + 1$, welches in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle hat. Die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat aber in $\mathbb{C}$ die Lösungen $\pm i$. Dies gilt sogar allgemein, wie der folgende Satz zeigt.

2.15 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Zu jedem Polynom der Form* (2.14)*, mit* $n \geq 1$ *und* $a_n \neq 0$*, gibt es eine Zahl* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $f(w) = 0$.

2.16 Satz. *Jedes komplexe Polynom der Form* (2.14) *mit* $n \geq 1, a_n \neq 0$ *besitzt eine* **Faktorisierung über** $\mathbb{C}$ *der Form*

$$f(z) = a_n(z - w_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - w_k)^{l_k} \tag{2.17}$$

mit verschiedenen Nullstellen $w_i \in \mathbb{C}$ *der Vielfachkeit* l_i *mit* $\sum_{i=1}^{k} l_i = n$.

- Jedes reelle Polynom kann als komplexes Polynom aufgefasst werden, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

2.18 Lemma. *Sei* $w \in \mathbb{C}$ *eine Nullstelle eines Polynoms* f *mit reellen Koeffizienten. Dann ist auch* $\overline{w}$ *eine Nullstelle von* f.

2.19 Satz. *Jedes reelle Poynom* $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_k x^k, n \geq 1, a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0$, *besitzt die* **Faktorisierung über** $\mathbb{R}$

$$f(x) = a_n(x - b_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{l_r}(x^2 + c_1x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + c_sx + d_s)^{k_s},$$

mit reellen Nullstellen $b_i \in \mathbb{R}$ *der Vielfachkeit* l_i *und quadratischen Polynomen* $x^2 + c_ix + d_i$*, die keine reelle Nullstelle haben.*