2.15 Satz (Fundamentalsatz der Algebra). *Zu jedem Polynom der Form* (2.14)*, mit* $n \geq 1$ *und* $a_n \neq 0$*, gibt es eine Zahl* $w \in \mathbb{C}$ *mit* $f(w) = 0$*.*

2.16 Satz. *Jedes komplexe Polynom der Form* (2.14) *mit* $n \geq 1, a_n \neq 0$ *besitzt eine* **Faktorisierung über** $\mathbb{C}$ *der Form*

$$f(z) = a_n(z - w_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (z - w_k)^{l_k} \tag{2.17}$$

mit verschiedenen Nullstellen $w_i \in \mathbb{C}$ *der Vielfachkeit* l_i *mit* $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i = n$*.*

- Jedes reelle Polynom kann als komplexes Polynom aufgefasst werden, da $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

2.18 Lemma. *Sei* $w \in \mathbb{C}$ *eine Nullstelle eines Polynoms* f *mit reellen Koeffizienten. Dann ist auch* $\overline{w}$ *eine Nullstelle von* f*.*

2.19 Satz. *Jedes reelle Poynom* $f(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_k x^k, n \geq 1, a_k \in \mathbb{R}, a_n \neq 0,$ *besitzt die* **Faktorisierung über** $\mathbb{R}$

$$f(x) = a_n(x - b_1)^{l_1} \cdot \dots \cdot (x - b_r)^{l_r} (x^2 + c_1 x + d_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + c_s x + d_s)^{k_s},$$

mit reellen Nullstellen $b_i \in \mathbb{R}$ *der Vielfachkeit* l_i *und quadratischen Polynomen* $x^2 + c_i x + d_i$*, die keine reelle Nullstelle haben.*

2.20 Satz. *Die rationalen Nullstellen eines Polynoms*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad , a_i \in \mathbb{Z}$$

findet man unter den Brüchen $\frac{a}{b}$ $(a, b \in \mathbb{Z})$ *in denen* a *ein Teiler von* a_0 *und* b *ein Teiler von* a_n *ist.*

2.21 Satz. *Zu* $(n+1)$ *beliebigen Stützpunkten* (x_i, y_i)*,* $i = 0, \dots, n$*, mit* $x_i \neq x_j$ *für* $i \neq j$*, gibt es genau ein Polynom* p_n *mit Grad kleiner gleich* n*, so dass* $p_n(x_i) = y_i, i = 0, \dots, n$*.*

• Newton Interpolationsverfahren
Man suche das Polynom p_n aus Satz 2.21 in der Form

$$\begin{aligned} p_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x - x_0) + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + \\ + \alpha_n(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Die Bedingung $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \ldots, n$, liefert das Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \alpha_0 \\
y_1 &= \alpha_0 + \alpha_1(x_1 - x_0) \\
&\vdots \\
y_n &= \alpha_0 + \alpha_1(x_n - x_0) + \cdots + \alpha_n(x_n - x_0) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1})
\end{aligned}
$$

Dieses kann schrittweise von oben nach unten mit der Methode der **dividierten Differenzen** gelöst werden:

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_0 & y_0 & \searrow & & & & & \\
 & & \nearrow & y_{0,1} & \searrow & & & \\
x_1 & y_1 & \searrow & & \nearrow & y_{0,1,2} & & \\
 & & \nearrow & y_{1,2} & & & \searrow & \\
x_2 & y_2 & & & & \vdots & \cdots \nearrow & y_{0,1,\ldots,n} \\
 & & & \vdots & \searrow & & & \\
 & & & & \nearrow & y_{n-2,n-1,n} & & \\
\vdots & \vdots & \searrow & & & & & \\
 & & \nearrow & y_{n-1,n} & & & & \\
x_n & y_n & & & & & &
\end{array}
$$

Hierbei ist

$$
\begin{array}{lll}
y_{0,1} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, & y_{1,2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \ldots \\
y_{0,1,2} = \frac{y_{1,2} - y_{0,1}}{x_2 - x_0}, & y_{1,2,3} = \frac{y_{2,3} - y_{1,2}}{x_3 - x_1}, & \ldots \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

Man kann nachrechnen, dass

$$\alpha_i = y_{0,1,\ldots,i}\,,$$

d.h. die gesuchten Koeffizienten stehen in oberen Schrägzeile.

2.23 Definition. *Der Quotient zweier Polynome*

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j x^j}, \qquad a_n \neq 0, b_m \neq 0,$$

heißt **rationale Funktion**.

2.24 Satz. *Jede rationale Funktion $\frac{p(x)}{q(x)}$ mit Zählergrad $\geq$ Nennergrad lässt sich darstellen als*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = h(x) + \frac{r(x)}{q(x)} \tag{2.25}$$

mit einem Polynom h und einem Restpolynom r wobei entweder $r = 0$ oder $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$.

2.26 Definition. *Seien p, d Polynome. Man nennt d eine* **Teiler** *von p, wenn es ein Polynom p_0 gibt, so dass $p(x) = d(x)p_0(x)$.*

2.27 Lemma. *Sei $\frac{p}{q}$ eine rationale Funktion und sei $\operatorname{Grad} p \geq \operatorname{Grad} q$. Sei ferner*

$$\frac{p}{q} = h + \frac{r}{q},$$

wobei $\operatorname{Grad} r < \operatorname{Grad} q$. Dann ist d genau dann ein gemeinsamer Teiler von p und q, wenn d gemeinsamer Teiler von q und r ist.

• Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion, wobei p und q teilerfrei sind. Dann haben $p(x)$ und $q(x)$ keine gemeinsamen Nullstellen und der **maximale Definitionsbereich** der rationalen Funktion f ist gegeben durch

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, q(x) \neq 0\}. \tag{2.28}$$

Sei $b \in \mathbb{R}$ eine l-fache Nullstelle von $q(x)$, d.h.

$$q(x) = (x-b)^l q_1(x), \qquad \text{mit } q_1(b) \neq 0.$$

Dann nennt man b einen **l-fachen Pol** von f. Die Funktion f verhält sich wie

$$f(x) \approx \frac{p(b)}{q_1(b)} \cdot \frac{1}{(x-b)^l} \qquad \text{für } x \text{ nahe } b,$$

und für $|x| \to \pm\infty$ wie

$$f(x) = \frac{a_n x^n (1 + \cdots + \frac{a_0}{a_n x^n})}{b_m x^m (1 + \cdots + \frac{b_0}{b_m x^m})} \approx \frac{a_n}{b_m} x^{n-m}.$$

2.3 Trigonometrische Funktionen

In Paragraph 1.3 Punkt 3.2 haben wir die Sinus- und die Cosinusfunktion definiert. Aus der Definition erhält man sofort folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} -1 \le \cos x &\le 1, \\ \cos(-x) &= \cos x \qquad \text{(gerade Funktion)}, \\ \cos(x+2k\pi) &= \cos x \qquad \text{(2π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} -1 \le \sin x &\le 1, \\ \sin(-x) &= -\sin x \qquad \text{(ungerade Funktion)}, \\ \sin(x+2k\pi) &= \sin x \qquad \text{(2π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \cos x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \pm\tfrac{1}{2}\pi,\ \pm\tfrac{3}{2}\pi,\ \pm\tfrac{5}{2}\pi, \dots, \\ \sin x = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\ . \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.4 Satz (Additionstheorem). *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \\ \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y. \end{aligned} \tag{3.5}$$

- Der Spezialfall $y = \frac{\pi}{2}, bzw. \quad y = -\frac{\pi}{2}$ impliziert:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) &= \cos x, \\ \cos\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right) &= \sin x, \end{aligned} \tag{3.6}$$

  d.h. wenn man die Sinuskurve nach links um $\frac{\pi}{2}$ verschiebt erhält man die Cosinuskurve.

- In Formelsammlungen gibt es zahlreiche Identitäten, die sich aus (3.5) herleiten lassen. Hier einige Beispiele:

$$\begin{aligned} \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y, \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \tfrac{x+y}{2}\ \cos \tfrac{x-y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \tfrac{x+y}{2}\ \cos \tfrac{x-y}{2}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1, \\ \sin 2x &= 2 \sin x\ \cos x, \end{aligned} \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} 1+\cos x &= 2\cos^2\tfrac{x}{2}, \\ 1-\cos y &= 2\sin^2\tfrac{x}{2}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

Achtung: $\sin^2 x := (\sin(x))^2$

3.11 Definition. *Die* **Tangens- und Cotangensfunktionen** *sind definiert durch*

$$\begin{aligned} \tan x &:= \tfrac{\sin x}{\cos x} && \textit{mit } x \neq (2k+1)\tfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ \cos x &:= \tfrac{\cos x}{\sin x} && \textit{mit } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

- Wir erhalten sofort folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \tan(-x) &= -\tan x, && \text{(ungerade Funktion)}, \\ \cos(-x) &= -\cos x, && \text{(ungerade Funktion)}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \tan(x+\pi) &= \tan x, && \text{(π-periodisch)}, \\ \cos(x+\pi) &= \cos x, && \text{(π-periodisch)}, \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}, \qquad \text{für „erlaubte“ } x, y. \tag{3.14}$$

3.15 Polardarstellung komplexer Zahlen. *Die Menge der komplexen Zahlen ist* $\mathbb{C} = \{z = x + iy\,;\, x, y \in \mathbb{R}\}$. *Man kann jede komplexe Zahl* z *auch als „Zeiger“ auffassen und deshalb ist* z *eindeutig bestimmt durch den Winkel* φ *und den Betrag* $|z|$.

- Man nennt φ das **Argument** von z, $\varphi =: \arg z$. Falls $-\pi < \varphi \leq \pi$ heißt φ **Haupwert von** $\arg z$

- Wir haben zwei Möglichkeiten eine komplexe Zahl anzugeben:

  $$z = x + iy \qquad \text{mit } x = \operatorname{Re} z,\ y = \operatorname{Im} z,$$

  oder durch Angabe des Betrages $r = |z|$ und des Arguments $\varphi = \arg z$. Aber wir wissen, dass $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und somit erhalten wir

  $$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{3.16}$$

  Diese Form der Darstellung von z heißt **Polardarstellung**.

- Die folgende abkürzende Schreibweise ist sinnvoll

$$e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}. \tag{3.17}$$

Sie heißt **Euler-Formel**.

3.18 Umrechnungen.

1) Sei $z \in \mathbb{C}$, mit $z \neq 0$, gegeben in der Form: $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$
$$\varphi = \begin{cases} \arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y \geq 0\,, \\ -\arccos\frac{x}{r} & \text{falls } y < 0\,. \end{cases}$$

Wir erhalten die Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$.

2) Sei $z \in \mathbb{C}$ in der Polardarstellung $z = re^{i\varphi}$ gegeben. Dann setzen wir

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

und erhalten die Darstellung $z = x + iy$.

3.19 Satz (De Moivre). *Für alle $\varphi, \psi \in \mathbb{R}$ gilt,*

a) $e^{i\varphi}e^{i\psi} = e^{i(\psi+\varphi)}$,

b) $\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}, \quad n \in \mathbb{N}$,

c) $\overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} = \frac{1}{e^{i\varphi}}$.

- Die Multiplikation und Division komplexer Zahlen lässt sich besonders einfach in der Polardarstellung berechnen. Sei $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z||w|\, e^{i(\varphi+\psi)}, \\ \frac{z}{w} &= \frac{|z|}{|w|}\, e^{i(\varphi-\psi)}, \qquad \text{falls } w \neq 0. \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.21 Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt* **periodisch** *mit einer* **Periode** $2l$, *wenn*

$$f(x + 2l) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

3.22 Definition. *Als* **Schwingung**, *bezeichnet man einen Vorgang, der durch eine periodische Funktion eines „Zeitparameters“ $t \in \mathbb{R}$ beschrieben wird. Eine durch*

$$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)\ , \quad t \in \mathbb{R}$$

mit festem $A, \omega, \alpha \in \mathbb{R}$ dargestellte Schwingung heißt **harmonisch**. *A heißt* **Amplitude**, *$\omega t + \alpha$ die* **Phase**, *α die* **Nullphase** *und ω die* **Kreisfrequenz**. *Die* **Periode** *beträgt $T = \frac{2\pi}{\omega}$ und die* **Frequenz** *$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$.*

- Die **Überlagerung** $s(t)$ zweier Schwingungen $s_1(t)$, $s_2(t)$ ist punktweise definiert, d.h. die Auslenkungen addieren sich

  $$s(t) := s_1(t) + s_2(t).$$

  Die Überlagerung $s(t)$ ist im Allgemeinen nicht mehr periodisch.

- Die Behandlung von harmonischen Schwingungen $s(t)$ vereinfacht sich, wenn man **komplexe Schwingungen** $z(t)$ einführt. Sei

  $$s(t) = A\cos(\omega t + \alpha),$$

  dann definiert man

  $$\begin{aligned} z(t) &:= A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha) \\ &= Ae^{i(\omega t + \alpha)} \\ &= ae^{i\omega t}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

  Hierbei ist a gegeben durch $a := Ae^{i\alpha}$ und heißt **komplexe Amplitude**.

3.24 Satz. *Besitzen zwei harmonische Schwingungen die gleiche Kreisfrequenz, d.h.*

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \alpha_1), \quad s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \alpha_2),$$

*so ist ihre Überlagerung (***Superposition***) $s(t)$ wieder eine harmonische Schwingung, die gegeben ist durch*

$$s(t) := s_1(t) + s_2(t) = A\ \cos(\omega t + \alpha)$$

mit $A = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\cos\alpha = \frac{u}{A}$, $\sin\alpha = \frac{v}{A}$, wobei

$$u := A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2, \qquad v := A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2.$$

- Es gilt folgende Formel:

$$\sin\delta + \sin 2\delta + \cdots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\,\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} \tag{3.25}$$

- Auf Grund der Darstellungen $\omega_1 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ und $\omega_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ läßt sich die Überlagerung zweier komplexer Schwingungen immer als Produkt

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = \left(a_1 e^{i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} + a_2 e^{i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right) e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \tag{3.26}$$

  darstellen. Man sagt dazu **modulierte Schwingung** mit **modulierter Amplitude**.

- Im Allgemeinen ist eine modulierte Schwingung nicht periodisch. Ist der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ jedoch eine rationale Zahl, so ist die modulierte Schwingung doch periodisch. In diesem Fall besitzen die Schwingungen $z_1(t) = a_1 e^{i\omega_1 t}$ und $z_2(t) = a_2 e^{i\omega_2 t}$ die gemeinsame Periode $T := \frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2}$, d.h. $z_1(t) + z_2(t)$ ist periodisch aber nicht notwendig harmonisch.