- Es gilt folgende Formel:

$$\sin\delta + \sin 2\delta + \cdots + \sin n\delta = \frac{\sin\frac{n+1}{2}\delta\,\sin\frac{n}{2}\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} \tag{3.25}$$

- Auf Grund der Darstellungen $\omega_1 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} + \frac{\omega_1-\omega_2}{2}$ und $\omega_2 = \frac{\omega_1+\omega_2}{2} - \frac{\omega_2-\omega_1}{2}$ läßt sich die Überlagerung zweier komplexer Schwingungen immer als Produkt

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} = \left(a_1 e^{i\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t} + a_2 e^{i\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t}\right) e^{i\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t} \tag{3.26}$$

  darstellen. Man sagt dazu **modulierte Schwingung** mit **modulierter Amplitude**.

- Im Allgemeinen ist eine modulierte Schwingung nicht periodisch. Ist der Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$ jedoch eine rationale Zahl, so ist die modulierte Schwingung doch periodisch. In diesem Fall besitzen die Schwingungen $z_1(t) = a_1 e^{i\omega_1 t}$ und $z_2(t) = a_2 e^{i\omega_2 t}$ die gemeinsame Periode $T := \frac{2\pi n_1}{\omega_1} = \frac{2\pi n_2}{\omega_2}$, d.h. $z_1(t) + z_2(t)$ ist periodisch aber nicht notwendig harmonisch.

2.4 Zahlenfolgen und Grenzwerte

Das Herz der Analysis sind Grenzwerte. Wir fangen unsere Untersuchungen mit Folgen an und übertragen die Ergebnisse dann auf Funktionen.

4.1 Definition. *Unter einer* **Folge** *reeller Zahlen versteht man eine auf* $\mathbb{N}_0$ *erklärte Funktion, das heißt jedem* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist ein* $a_n \in \mathbb{R}$ *zugeordnet. Man schreibt*

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}\ ;\ (a_n)_{n\geq 0}\,;\ a_0, a_1, a_2, \cdots$$

Die Zahlen a_n *heißen* **Glieder** *der Folge.*

Beispiele:

1) $a_n = c$ **konstante Folge** $c, c, \cdots$

2) $a_n = n$ **Folge der natürlichen Zahlen** $1, 2, 3, \cdots$

3) $a_n = a_0 + nd$ **arithmetische Folge** $a_0, a_0 + d, a_0 + 2d, \cdots$

4) $a_n = a_0\, q^n$ **geometrische Folge** $a_0, a_0\, q, a_0\, q^2, \cdots$

5) $a_0 = 1\,,\; a_{n+1} = (n+1)a_n$ **rekursiv definierte Folge**

4.2 Definition. *Eine Folge heißt* **beschränkt**, *wenn es Konstanten K_1, K_2 gibt, so dass*

$$K_1 \le a_n \le K_2 \qquad \textit{für alle } n \in \mathbb{N}_0\,.$$

• *Im obigen Beispiel sind die Folgen in 1) und 4) für $q < 1$ beschränkt. Die Folgen in 2), 3) für $d \neq 0$ und 5) sind unbeschränkt.*

4.3 Definition. *Man sagt, die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$* **konvergiert** *gegen den* **Grenzwert** *$a \in \mathbb{R}$ und schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \textit{oder} \qquad a_n \to a,$$

wenn es zu jeder beliebig kleinen Schranke $\varepsilon > 0$ einen Index $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass gilt:

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \ge n_0,$$

d.h. alle Glieder ab einem bestimmten Index (dieser hängt von ε ab!) liegen in einer ε-Umgebung von a.

- *Falls der Grenzwert existiert heißt die Folge* **konvergent**, *ansonsten* **divergent**.

- *Falls $a = 0$ heißt die Folge* **Nullfolge**.

4.4 Satz. *Für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ gilt:*

1) Ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$, so gilt $a = b$.

2) Die Folge $(a_n)_{n\ge 0}$ ist beschränkt.

4.5 Definition. *Man sagt, eine Folge $(a_n)_{n\ge 0}$* **divergiert gegen** ∞, *in Zeichen*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wenn für alle $K \in \mathbb{N}_0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $a_n > K$ für alle $n \ge n_0$. Analog definiert man: **divergiert gegen -**∞.

4.6 Lemma. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0, \qquad$ *falls* $|x| < 1$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty, \qquad$ *falls* $x > 1$,

3) Die Folge $(x^n)_{n\geq 0}$ *divergiert, falls* $x < -1$.

4.7 Geometrische Reihe. *Die Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$ *sei gegeben durch:*

$$a_n = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Für die endliche geometrische Reihe gilt:

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, & \text{falls } x \neq 1, \\ n+1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Es können folgende Fälle auftreten:

a) $|x| < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{x^{n+1}}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x}$,

b) $x \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$,

c) $x < -1 \quad \Rightarrow \quad$ *divergiert.*

Statt $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ *schreibt man* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, *d.h.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{falls } |x| < 1, \\ \infty, & \text{falls } x \geq 1, \\ \text{divergiert}, & \text{falls } x < -1. \end{cases} \tag{4.8}$$

4.9 Harmonische Reihe. *Wir betrachten die Folge* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$. *Die zugehörigen Partialsummen* s_n *sind*

$$s_n = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \tfrac{1}{n}.$$

Es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{oder} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n} = \infty.$$

4.10 Definition. *Ist* $(a_n)_{n\geq 0}$ *eine Folge und* $n_0 < n_1 < \cdots$ *eine aufsteigende Indexfolge, dann heißt die Folge* $a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots$ **Teilfolge** *der Folge* $(a_n)_{n\geq 0}$.

2.5 Rechenregeln für Grenzwerte und Konvergenzkriterien

Seien $(a_n)_{n\geq 0}, (b_n)_{n\geq 0}$ Folgen. Dann sind $a_n \pm b_n, a_n \cdot b_n$, und a_n/b_n neue Folgen. Zur Grenzwertberechnung sollte man zuerst überprüfen, ob die zu betrachtende Folge aus einfacheren Folgen zusammengesetzt ist.

5.1 Satz. *Sind $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Zahlenfolgen mit $a_n \to a$ und $b_n \to b$, dann gilt:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$,

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = a \cdot b$,

c) ist $a \neq 0$, dann gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_1$ und für die Folgen $(a_n)_{n\geq n_1}$, $(b_n)_{n\geq n_1}$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n} = \frac{b}{a}$,

d) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = |a|$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_n} = \sqrt{a}$, *falls alle* $a_n \geq 0$.

5.2 Satz. *Lassen sich für alle $n \geq n_1$ die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ abschätzen durch $b_n \leq a_n \leq c_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.*

5.3 Satz. *Seien $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq n_1$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.*

• Da Folgen spezielle Funktionen sind wissen wir schon, was eine **monoton wachsende** (**bzw. monoton fallende**) Folge ist, nämlich wenn für alle $n \geq 0$ gilt $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw. $a_{n+1} \leq a_n$).

5.4 Satz. *Jede monoton wachsende oder fallende, beschränkte Folge ist konvergent.*

Beispiel: Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, wobei $a_n := \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. Diese Folge ist monoton wachsend und beschränkt. Also konvergiert sie und man definiert die **Eulersche Zahl** e durch

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right). \tag{5.5}$$

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ konvergiert sehr schnell. Man kann zeigen, dass die Eulersche Zahl e auch der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ mit $b_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ist, d.h.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n . \tag{5.6}$$

Die Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergiert sehr langsam.

5.7 Definition. *Die* **Exponentialfunktion** $e : x \mapsto e^x$ *ist für alle* $x \in \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$e^x := \lim_{n\to\infty} \left(1+\tfrac{x}{n}\right)^n . \tag{5.8}$$

2.6 Funktionengrenzwerte, Stetigkeit

Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I \cup \{-\infty, \infty\}$ und $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Uns interessiert das Verhalten von f, wenn x sich a nähert, wobei $x \neq a$.

6.1 Definition. *Die Funktion f hat für x gegen a den* **rechtsseitigen Grenzwert** *(bzw.* **linksseitigen Grenzwert***) c, in Zeichen $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = c$ (bzw. $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$), wenn für jede Folge $(x_n)_{n\geq 0}$ aus I mit $x_n \to a$ und $a < x_n$ für alle n (bzw. $x_n \to a$ und $x_n < a$ für alle n) die Folge $(f(x_n))_{n\geq 0}$ den Grenzwert c hat. f hat für x gegen a den* **Grenzwert** *c, in Zeichen $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, wenn gilt $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = c$.*

6.2 Satz. *Aus $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = d$, mit $c, d \in \mathbb{R}$ folgt:*

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = c \pm d$,

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = c \cdot d$,

c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$, *falls* $d \neq 0$.

Dies gilt auch für $a = \pm\infty$ und einseitige Grenzwerte, $x \to a^+, x \to a^-$ aber nur für endliche Grenzwerte c, d.

6.3 Satz. *Wenn $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ für alle x in der Nähe von a gilt (bzw. für alle hinreichend großen x) und wenn $g(x) \to c$, $h(x) \to c$ für $x \to a$ (bzw. $x \to \infty$), dann gilt auch $\lim_{x\to a} f(x) = c$ (bzw. $\lim_{x\to\infty} f(x) = c$).*

• Es gelten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{6.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{6.5}$$