6.3 Satz. *Wenn $g(x) \le f(x) \le h(x)$ für alle x in der Nähe von a gilt (bzw. für alle hinreichend großen x) und wenn $g(x) \to c$, $h(x) \to c$ für $x \to a$ (bzw. $x \to \infty$), dann gilt auch $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$ (bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$).*

• Es gelten:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{6.4}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0. \tag{6.5}$$

6.6 Asymptoten.

a) *Man nennt die Gerade $x = a$ eine* **vertikale Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$, wenn beim Grenzübergang $x \to a^+$ oder $x \to a^-$ die Funktionswerte $f(x)$ gegen ∞ oder $-\infty$ streben.*

b) *Die Gerade $y = c$ heißt* **horizontale Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$, wenn $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$ oder $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$ gilt.*

c) *Als* **schräge Asymptote** *der Kurve $y = f(x)$ bezeichnet man die Gerade $y = px+q$, falls $p \neq 0$ und $f(x)-(px+q) \to 0$ für $x \to \infty$ oder $x \to -\infty$.*

6.7 Definition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Funktion f heißt* **im Punkt** *$x_0 \in I$* **stetig**, *wenn $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

- Falls x_0 ein Randpunkt des Intervalls ist, so ist der Grenzwert nur einseitig zu verstehen.
- Die Funktion f heißt **auf I stetig**, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in I$ stetig ist.

6.8 Satz.

a) *Sind f und g auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ stetig, so gilt das auch für $f \pm g$ und $f \cdot g$. Ferner ist $\frac{f}{g}$ stetig in allen $x \in I$ mit $g(x) \neq 0$.*

b) *Sind $f : I \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(D) \subseteq I$, dann ist auch die Komposition $h : D \to \mathbb{R}$, $h = f \circ g$ auf D stetig.*

6.9 Korollar.

a) Jedes Polynom $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i$ *ist auf ganz* $\mathbb{R}$ *stetig.*

b) Seien p, q *Polynome, die teilerfremd sind. Dann ist die rationale Funktion* $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ *stetig in allen Punkten* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $q(x) \neq 0$.

6.10 Satz. *Für jede auf einem abgeschlossenen beschränkten Intervall* $a \leq x \leq b$ *stetige Funktion gilt:*

a) **Schrankensatz:** *Es gibt eine Schranke* K *mit* $|f(x)| \leq K$ *für alle* $x \in [a, b]$.
(Man sagt: f *ist auf* $[a, b]$ *beschränkt.)*

b) **Satz vom Maximum und Minimum:** *Es gibt stets Werte* $x_0, x_1 \in [a, b]$, *so dass* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *für alle* $x \in [a, b]$.
(Man sagt: f *nimmt auf* $[a, b]$ *immer sein Minimum und sein Maximum an.)*

c) **Zwischenwertsatz:** *Zu jeder Zahl* c *zwischen dem Minimum* $f(x_0)$ *und dem Maximum* $f(x_1)$ *gibt es wenigstens ein* $\bar{x} \in [a, b]$ *mit* $f(\bar{x}) = c$.
(Man sagt: f *nimmt jeden Wert zwischen seinem Minimum und Maximum an.)*

d) **Die gleichmäßige Stetigkeit:** *Zu jeder beliebig kleinen Zahl* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\delta > 0$, *so dass zwei Funktionswerte sich um höchstens* ε *unterscheiden, sobald die Argumente weniger als* δ *voneinander entfernt sind, d.h.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \Big(\quad |x - x'| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| \leq \varepsilon \Big) .$$

6.11 Korollar. *Ist* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig und haben* $f(a)$ *und* $f(b)$ *verschiedene Vorzeichen, dann gibt es wenigstens eine Nullstelle* $\bar{x} \in (a, b)$ *von* f, *d.h.* $f(\bar{x}) = 0$.

• **Bisektion** Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion so, dass $f(b) \cdot f(a) < 0$. Dann existiert nach Korollar 6.11 eine Nullstelle in $[a, b]$. Diese kann man durch sukzessives Halbieren des Intervalls genauer bestimmen. Im Falle $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot f(b) < 0$ liegt die Nullstelle im Intervall $[\frac{a+b}{2}, b]$, sonst in $[a, \frac{a+b}{2}]$. Dieses Verfahren kann beliebig oft wiederholt werden und somit kann die Nullstelle beliebig genau bestimmt werden.

Kapitel 3

Differentation

Die Differentialrechnung ist eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Mathematik selbst und in der mathematischen Behandlung von Problemen aus Wissenschaft und Technik. Insbesondere wird sie in diesem Kapitel zur Kurvendiskussion und zur Extremwertbestimmung benutzt.

3.1 Die Ableitung

1.1 Definition. *Die Funktion f sei auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert und es sei $x_0 \in I$. Man sagt, f* **ist in x_0 differenzierbar**, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1.2}$$

existiert und endlich ist. Dieser Grenzwert wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

- Man nennt $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} := \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ den **Differenzenquotienten**. Man kann (1.2) auch durch $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ersetzen.

- andere Bezeichnungen: $\frac{d\,f(x_0)}{dx}$, $\frac{d}{dx}\,f$

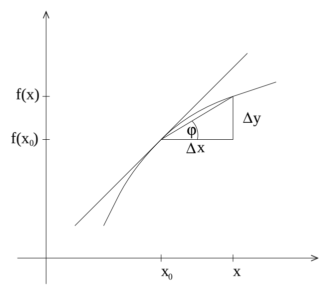
- Falls f in jedem Punkt $x_0 \in I$ differenzierbar ist, sagt man dass f auf I **differenzierbar** ist. Die so definierte Funktion $f' : I \to \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ heißt **Ableitung von f**.

Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$	
c	0	
$ax+b$	a	
x^n	nx^{n-1}	für $n \in \mathbb{N}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	für $x > 0$

(1.3)

1.4 Geometrische Interpretation. *Sei* $y = f(x)$ *eine gegebene Funktion. Dann ist* $\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *der Anstieg der Sekante durch die Punkte* $(x_0, f(x_0))$, $(x, f(x))$.



Der Grenzwert $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *ist der Anstieg der Tangente an* $y = f(x)$ *im Punkt* $(x_0, f(x_0))$, *d.h. die Tangente des Graphen* $y = f(x)$ *hat im Punkt* $(x_0, f(x_0))$ *die Formel*

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) \; + f(x_0). \tag{1.5}$$

1.6 Analytische Interpretation.

Sei $y = f(x)$ eine gegebene Funktion und $(x_0, f(x_0))$ ein Punkt. Wir suchen die „beste“ lineare Approximation von f in der Nähe von x_0, d.h. eine lineare Funktion $g(x)$, so dass

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0, \tag{*}$$

d.h. der Fehler $f(x) - g(x)$ strebt schneller gegen Null als $x - x_0$. Die Funktion g ist linear und somit gegeben durch $g(x) = m(x - x_0) + f(x_0)$. Aus (*) erhalten wir $m = f'(x_0)$, d.h. die Tangente (1.5) ist die "beste" lineare Approximation von $f(x)$ nahe $(x_0, f(x_0))$.

1.7 Satz. *Jede in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in x_0 auch stetig.*

• Stetigkeit von f ist **nicht** hinreichend für Differenzierbarkeit!

1.8 Satz. *Sind Funktionen $f, g : I \to \mathbb{R}$ im Punkt $x \in I$ differenzierbar, so gilt:*

a) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$,

b) $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$,

c) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$, *falls* $g(x) \neq 0$.

d) $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$, *falls* $g(x) \neq 0$.

- Für Polynome $p(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i\, x_i$ gilt:

$$p'(x) = \sum_{i=1}^{n} i a_i\, x^{i-1}. \tag{1.9}$$

- Wir haben folgenden Spezialfall von Satz 1.8 d)

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{-n}{x^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N},\ x \neq 0\,. \tag{1.10}$$

1.11 Satz. *Die Sinus- und die Cosinusfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt:*

a) $(\sin\ x)' = \cos\ x$,

b) $(\cos\ x)' = -\sin\ x$,

c) $(\tan\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\qquad x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\,,\ k \in \mathbb{Z}$,

d) $(\cot\ x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $\qquad x \neq k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

1.12 Satz. (Kettenregel) *Die Komposition $x \mapsto f(g(x))$ zweier differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar und es gilt*

$$(f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{1.13}$$

1.14 Höhere Ableitungen. *Die Ableitung der Ableitung von f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit f'' oder $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$. Allgemein definieren wir*

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &:= f(x) \\ f^{(1)}(x) &:= f'(x) \\ f^{(n)}(x) &:= \frac{d}{dx}\, f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \end{aligned}$$

Hierbei heißt $f^{(n)}(x)$ die ***n-te Ableitung von*** *f und f heißt* ***n-mal differenzierbar*** *wenn die n-te Ableitung existiert.*

• Mit Hilfe der Eulerschen Formel Kapitel 2 (3.17) und Satz 1.11 kann man zeigen, dass

$$\frac{d}{dt} e^{iwt} = iw\, e^{iwt}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

3.2 Anwendungen der Differentation

2.1 Maxima und Minima.

Man sagt, eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein **globales Maximum**, wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ gilt. Die Zahl $b \in D$ heißt **lokales Maximum von f,** wenn es eine ε-Umgebung $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ von b gibt, so dass $f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in D \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Analog definiert man **globales Minimum**, **lokales Minimum**. Jedes Minimum und jedes Maximum heißt **Extremum**.

2.2 Satz. *Ist f in einem offenen Intervall I differenzierbar, so gilt:*

$$x_0 \in I \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

• Aus Satz 2.2 und den Bemerkungen folgt, dass

1) Randpunkte von D,
2) Punkte, wo f nicht differenzierbar ist, und (2.3)
3) **stationäre Punkte**, d.h. Punkte wo $f'(x) = 0$ ist,

Kandidaten für Extrema sind.