1.14 Höhere Ableitungen. *Die Ableitung der Ableitung von f bezeichnen wir, falls sie existiert, mit f'' oder $\frac{d^2}{dx^2} f(x)$. Allgemein definieren wir*

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &:= f(x) \\ f^{(1)}(x) &:= f'(x) \\ f^{(n)}(x) &:= \frac{d}{dx}\, f^{(n-1)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x). \end{aligned}$$

Hierbei heißt $f^{(n)}(x)$ die **n-te Ableitung von** *f und f heißt* **n-mal differenzierbar** *wenn die n-te Ableitung existiert.*

• Mit Hilfe der Eulerschen Formel Kapitel 2 (3.17) und Satz 1.11 kann man zeigen, dass

$$\frac{d}{dt}\, e^{iwt} = iw\, e^{iwt}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1.15}$$

3.2 Anwendungen der Differentation

2.1 Maxima und Minima. *Man sagt, eine auf $D \subseteq \mathbb{R}$ erklärte Funktion f hat in $a \in D$ ein* **globales Maximum**, *wenn $f(x) \leq f(a)$ für alle $x \in D$ gilt. Die Zahl $b \in D$ heißt* **lokales Maximum von f,** *wenn es eine ε-Umgebung $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ von b gibt, so dass $f(x) \leq f(b)$ für alle $x \in D \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Analog definiert man* **globales Minimum**, **lokales Minimum**. *Jedes Minimum und jedes Maximum heißt* **Extremum**.

2.2 Satz. *Ist f in einem offenen Intervall I differenzierbar, so gilt:*

$$x_0 \in I \text{ ist lokales Extremum } \Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

• Aus Satz 2.2 und den Bemerkungen folgt, dass

1) Randpunkte von D,
2) Punkte, wo f nicht differenzierbar ist, und (2.3)
3) **stationäre Punkte**, d.h. Punkte wo $f'(x) = 0$ ist,

Kandidaten für Extrema sind.

2.4 Satz (Mittelwertsatz). *Ist die Funktion f auf $[a,b]$ stetig und auf (a,b) differenzierbar, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a,b)$ mit*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

2.5 Satz. *Für eine auf dem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f gilt:*

a) $f'(x) > 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *ist auf I echt monoton wachsend,*

b) $f'(x) < 0$ *auf* $I \quad \Rightarrow \quad f$ *ist auf I echt monoton fallend,*

c) $f'(x) \geq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist auf I monoton wachsend,*

d) $f'(x) \leq 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist auf I monoton fallend,*

e) $f'(x) = 0$ *auf* $I \quad \Leftrightarrow \quad f$ *ist konstant auf I.*

2.6 Satz. *Eine auf (a,b) differenzierbare Funktion f hat im stationären Punkt $x_0 \in (a,b)$ ein lokales Maximum (bzw. lokales Minimum), wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass die Ableitung $f'(x)$ im Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ positiv und im Intervall $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ negativ ist (bzw. in $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ negativ und in $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ positiv).*

2.7 Satz. *Ist f auf (a,b) zweimal stetig differenzierbar und $x_0 \in (a,b)$ ein stationärer Punkt, dann gilt:*

a) $f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; f$ *hat in x_0 ein lokales Maximum,*

b) $f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; f$ *hat in x_0 ein lokales Minimum.*

2.8 Definition. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt* **konvex**, *wenn für alle $x_1, x_2 \in I$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Die Funktion heißt **konkav**, *wenn $-f$ konvex ist.*

2.9 Satz. *Sei f auf einem Intervall I zweimal differenzierbar, dann gilt:*

a) $f'' \geq 0$ *auf* $I \;\Rightarrow\; f$ *ist konvex,*

b) $f'' \leq 0$ *auf* $I \;\Rightarrow\; f$ *ist konkav.*

2.10 Definition. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Der Punkt $x_0 \in D$ heißt* **Wendepunkt**, *wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass f auf dem Intervall $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ konvex (bzw. konkav) ist und auf dem Intervall $(x_0, -\varepsilon, x_0)$ dem Intervall $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ konkav (bzw. konvex) ist.*

2.11 Satz. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Sei ferner $x_0 \in I$ ein Punkt, so dass $f''(x_0) = 0$ ist und die zweite Ableitung im Punkt x_0 ihr Vorzeichen wechselt. Dann ist x_0 ein Wendepunkt.*

2.12 Satz. *Sind f, g in $[a,b]$ stetig und in (a,b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann gibt es einen Punkt $x_0 \in (a,b)$, mit*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

2.13 Satz (de l'Hospital). *Sind f, g auf (a,b) differenzierbare Funktionen, $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$, mit den Eigenschaften*

a) $f(x) \to 0, g(x) \to 0$ *oder* $f(x) \to \infty, g(x) \to \infty$ *für* $x \to b^-$.

b) $\lim\limits_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *dann gilt:*

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für $x \to a^-$ und $x \to \pm\infty$.

2.14 Kurvendiskussion. *Um eine Vorstellung von der Gestalt des Graphen $y = f(x)$ zu bekommen führt man eine Kurvendiskussion durch, d.h.*

1) *Maximalen Definitions- und Wertebereich bestimmen,*
2) *Symmetrie, Periodizität testen,*
3) *Stetigkeit und Differenzierbarkeit prüfen,*
4) *Nullstellen und Vorzeichen bestimmen,*
5) *Extremwerte ermitteln,*
6) *Monotoniebereiche ermitteln,*
7) *Wendepunkte suchen,*
8) *Konvexität, Konkavität untersuchen,*
9) *Asymptoten, Grenzwerte bestimmen, $|x| \to \infty, x \to$ „kritische Stellen",*
10) *Skizze.*

2.15 Nullstellen und Fixpunkte. *Oftmals benötigt man die Nullstellen einer Funktion. Jedoch kann man nur selten eine explizite Lösung angeben. Deshalb bestimmt man Folgen von Näherungslösungen der Gleichung* $f(x) = 0$*, d.h. man konstruiert eine Folge* $(x_n)_{n\geq 0}$*, so dass* $f(x_n) \to 0$*. Das Finden von Nullstellen von* f *ist äquivalent zum Finden von Fixpunkten von* $g(x) = f(x) + x$*.*
Sei die Funktion f *auf* $[a,b]$ *definiert, dann heißt* $x \in [a,b]$ **Fixpunkt** *von* f*, wenn* $f(x^*) = x^*$*.*

2.16 Satz. *Hat eine auf* $[a,b]$ *stetig differenzierbare Funktion* f *folgende Eigenschaften*

a) $a \leq f(x) \leq b \qquad$ *für alle* $x \in [a,b]$,

b) es gibt eine Konstante K *mit* $|f'(x)| \leq K < 1$ *für alle* $x \in [a,b]$,

dann gilt:

1) Es gibt genau ein $x^* \in [a,b]$ *mit* $f(x^*) = x^*$.

2) Die Iterationsfolge

$$x_{n+1} = f(x_n), \qquad n \in \mathbb{N}_0 \tag{2.17}$$

mit beliebigen Startwert $x_0 \in [a,b]$ *konvergiert gegen den Fixpunkt* x^*.

3) Es gilt die Abschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \tfrac{K}{1-K} |x_n - x_{n-1}| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

2.18 Newton Verfahren. *Man sucht die Nullstellen* $f(x) = 0$ *einer gegebenen Funktion mit Hilfe einer Fixpunktiteration für die Hilfsfunktion*

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

unter der Voraussetzung $f'(x) \neq 0$ *auf* $[a,b]$*. Wir erhalten die Iterationsfolge*

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_0 \in [a,b]. \tag{2.19}$$

2.20 Satz. *Sei $x^* \in [a, b]$ eine Nullstelle der zweimal stetig differenzierbaren Funktion f. Falls $f'(x^*) \neq 0$ ist, gibt es ein kleines Intervall I, welches x^* enthält, so dass die in* (2.19) *definierte Iterationsfolge x_n für Startwerte x_0 aus diesem Intervall I gegen x^* konvergiert. Weiterhin gilt*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M \, |x_n - x^*|^2,$$

wobei $M = \frac{\max\{|f''(x)|; x \in I\}}{\min\{|f'(x)|; x \in I\}}$.