2.20 Satz. *Sei $x^* \in [a, b]$ eine Nullstelle der zweimal stetig differenzierbaren Funktion f. Falls $f'(x^*) \neq 0$ ist, gibt es ein kleines Intervall I, welches x^* enthält, so dass die in (2.19) definierte Iterationsfolge x_n für Startwerte x_0 aus diesem Intervall I gegen x^* konvergiert. Weiterhin gilt*

$$|x_{n+1} - x^*| \leq M\, |x_n - x^*|^2,$$

wobei $M = \frac{\max\{|f''(x)|;\, x\in I\}}{\min\{|f'(x)|;\, x\in I\}}$.

3.3 Umkehrfunktionen

3.1 Definition. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $D \subseteq I$. Man sagt, f* **ist über D umkehrbar**, *wenn zu jedem $y \in f(D)$ die Gleichung $y = f(x)$ genau eine Lösung $x \in D$ hat. Die* **Umkehrfunktion** *$g : f(D) \to D$ ordnet jedem y die eindeutige Lösung x von $y = f(x)$ zu, d.h.*

$$x = g(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x). \tag{3.2}$$

- *Aus (3.2) folgt*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(g(y)) = y, \\ g(y) &= g(f(x)) = x. \end{aligned} \tag{3.3}$$

3.4 Satz. *a) Jede strikt monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar. Jede über einem Intervall I stetig differenzierbare Funktion mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in I$ ist über I umkehrbar.*

b) Ist f über D umkehrbar mit der Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$, dann liegen die Graphen $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ symmetrisch zur Geraden $y = x$.

c) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to \mathbb{R}$ einer über einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ umkehrbaren und differenzierbaren Funktion f ist in allen Punkten $x \in f(I)$ mit $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \tag{3.5}$$

3.6 n-te Wurzel. *Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Funktion*

$$f(x) = x^n, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

1) *Falls n gerade ist, d.h. $n = 2k$, ist f nicht auf $\mathbb{R}$ umkehrbar, da $x^n = (-x)^n$. Aber für $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $f'(x) > 0$ und somit ist x^{2k} auf $\mathbb{R}_0^+$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion heißt n-***te Wurzel***, in Zeichen $\sqrt[n]{\cdot} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, d.h. $x = \sqrt[n]{y}$ genau dann wenn $x^n = y$.*

2) *Falls n ungerade ist, d.h. $n = 2k+1$, ist f auf ganz $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend, denn $f'(x) = (2k+1)\,x^{2k} > 0$, für $x \neq 0$. Damit ist die n-***te Wurzel*** auf ganz $\mathbb{R}$ definiert. Zusammenfassend haben wir:*

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \Leftrightarrow \quad y^n = x \begin{cases} \text{für } x \geq 0, & n \in \mathbb{N} \text{ gerade,} \\ \text{für } x \in \mathbb{R}, & n \in \mathbb{N} \text{ ungerade.} \end{cases} \tag{3.7}$$

Falls $x \in \mathbb{R}_0^+$ und $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\begin{aligned} x^{\frac{1}{n}} &:= \sqrt[n]{x}, \\ x^{\frac{m}{n}} &:= \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Aus der Definition ergeben sich sofort die Rechenregeln

$$\begin{aligned} x^\alpha x^\beta &= x^{\alpha+\beta}, \\ (x^\alpha)^\beta &= x^{\alpha\beta}, \\ x^\alpha y^\alpha &= (xy)^\alpha \end{aligned} \tag{3.9}$$

und die Formel für die Ableitung

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad x > 0. \tag{3.10}$$

3.11 Arcusfunktionen. *Wir betrachten jetzt die Umkehrfunktionen der Kreisfunktionen* $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$. *Dazu müssen wir geeignete Intervalle finden, auf denen diese Funktionen strikt monoton sind.*

- *Die Sinusfunktion ist auf $[-\pi/2, \pi/2]$ strikt monoton wachsend, denn $\sin'(x) = \cos x > 0$ falls $x \in (-\pi/2, \pi/2)$. Die Umkehrfunktion heißt* **Arcussinus**, *in Zeichen* arcsin, *und ist definiert durch*

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1, 1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ y = \arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad (\sin y = x) \quad &\wedge \quad (y \in [-\pi/2, \pi/2]). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Für die Ableitung gilt:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \text{für } -1 < x < 1. \tag{3.13}$$

- *Die Cosinusfunktion ist auf $[0,\pi]$ strikt monoton fallend. Die Umkehrfunktion heißt* **Arcuscosinus**, *in Zeichen* arccos, *und ist definiert durch:*

$$\begin{aligned} &\arccos : [-1,1] \to [0,\pi] \\ y = \arccos x \quad &\Leftrightarrow \quad (\cos y = x) \ \wedge (y \in [0,\pi]). \end{aligned} \tag{3.14}$$

  Analog zu (3.13) beweist man

$$(\arccos x)' = \tfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \textit{für } -1 < x < 1 \tag{3.15}$$

- Die Tangens- bzw. Cotangensfunktion ist auf dem Intervall $(-\pi/2,\, \pi/2)$ bzw. $(0,\pi)$ strikt monoton. Die Umkehrfunktion heißt **Arcustangens** bzw. **Arcuscotangens** und ist definiert als

$$\begin{aligned} \arctan : \ &\mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2) \\ \arctan x = y \quad \Leftrightarrow \quad &(\tan y = x) \quad \wedge \quad \big(y \in (-\pi/2,\, \pi/2)\big) \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{arccot} : \ &\mathbb{R} \to (0,\pi) \\ \operatorname{arccot} x = y \quad \Leftrightarrow \quad &\cot y = x \quad \wedge \quad y \in (0,\pi) \end{aligned} \tag{3.17}$$

  Für die Ableitungen ergibt sich für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\arctan x)' &= \tfrac{1}{1+x^2}, \\ (\operatorname{arccot} x)' &= \tfrac{-1}{1+x^2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

3.4 Exponential- und Logarithmusfunktion

4.1 Satz. *Die Exponentialfunktion hat folgende Eigenschaften:*

a) $e^0 = 1,\ e^x > 0 \qquad$ *für alle $x \in \mathbb{R}$.*

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\tfrac{d}{dx}\, e^x = e^x. \tag{4.2}$$

Somit ist insbesondere e^x stetig differenzierbar.

c) Jede auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbare Funktion f, welche $f'(x) = a\, f(x)$ für alle $x \in I$ erfüllt, ist von der Gestalt $f(x) = c\, e^{ax}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

d) Es gelten:

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^x e^y, &\quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ e^{-x} &= \tfrac{1}{e^x}, &\quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

- Wir haben für e-Funktion die Potenzschreibweise benutzt. Dies ist noch zu rechtfertigen. Es ist also zu zeigen dass

  $$\exp(x) := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^n$$

  die x-te Potenz von

  $$e = \exp(1) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n$$

  ist. Dazu benötigen wir

  $$\exp(rx) = (\exp(x))^r \qquad \forall x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}. \tag{4.4}$$

- Da die e-Funktion stetig ist, können wir Potenzen von e nun für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$ definieren als:

  $$e^x := \exp(x) = \lim_{n \to \infty} \exp(r_n) = \lim_{n \to \infty} e^{r_n}, \tag{4.5}$$

  wobei $r_n \to x$, $r_n \in \mathbb{Q}$.

4.6 Satz. *Die e-Funktion ist strikt monoton wachsend und konvex. Ferner gilt:*

a) $\lim\limits_{x \to \infty} e^x = \infty, \qquad \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

4.7 Exponentiale Prozesse. *In vielen Wachstums- und Zerfallsprozessen ist die Wachstums- oder Zerfallsgeschwindigkeit proportional zur Vorhandenen Menge der im Prozess beschriebenen Größe $u(t)$, d.h. $u(t)$ erfüllt eine Differentialgleichung der Form*

$$\dot{u}(t) = a u(t) \quad \textit{mit} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Also gilt nach Satz 4.1c)

$$u(t) = c e^{at}.$$

4.8 Der natürliche Logarithmus. *Die e-Funktion wächst strikt monoton, also existiert nach Satz 3.4a) auf* $(0, \infty)$ *eine Umkehrfunktion. Diese heißt der* **natürliche Logarithmus** *und ist definiert durch:*

$$\begin{aligned} \ln : (0, \infty) &\to \mathbb{R} \\ y = \ln x \qquad \Leftrightarrow &\qquad e^y = x. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \ln(e^x) &= x, \qquad x \in \mathbb{R}, \\ e^{\ln x} &= x, \qquad x > 0. \end{aligned} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \ln\ e &= 1, \\ \ln\ 1 &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} x \in (0,1) \quad &\Rightarrow \quad \ln x < 0, \\ x \in (1,\infty) \quad &\Rightarrow \quad \ln x > 0, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \ln x &= -\infty, \\ \lim_{x \to \infty} \ln x &= \infty. \end{aligned} \tag{4.13}$$

4.14 Satz. *Der natürliche Logarithmus ist strikt konkav und differenzierbar. Es gilt*

$$\tfrac{d}{dx} \ln x = \tfrac{1}{x}, \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \ln(xy) &= \ln x + \ln y, \\ \ln \tfrac{x}{y} &= \ln x - \ln y, \end{aligned} \tag{4.16}$$

wobei $x, y > 0$.
• *Der natürliche Logarithmus wächst langsamer als jede n-te Wurzel, d.h. für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}} = 0. \tag{4.17}$$

4.18 Allgemeine Exponentialfunktionen und Logarithmen. *Sei* $a > 0$. *Die Formel (4.4) besagt, dass für* $r \in \mathbb{Q}$ *und* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(e^x)^r = e^{rx}.$$

Die Wahl $x = \ln a$ *liefert also*

$$a^r = e^{r \ln a}.$$

Auf Grund der Stetigkeit der e-Funktion definiert man in Analogie zu (4.5)

$$a^x := e^{x \ln a} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, a > 0. \tag{4.19}$$

Man nennt $x \mapsto a^x$ *die* **Exponentialfunktion zur Basis** a**.**

4.20 Satz. *Für die Exponentialfunktion zur Basis* a*, mit* $a > 0$*, gilt für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *und* $b > 0$

$$\begin{aligned} a^x\, a^y &= a^{x+y}, \\ (ab)^x &= a^x\, b^x, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy}, \\ \ln(a^x) &= x \ln a, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a. \tag{4.23}$$