Die Wahl $x = \ln a$ liefert also

$$a^r = e^{r \ln a}.$$

Auf Grund der Stetigkeit der e-Funktion definiert man in Analogie zu (4.5)

$$a^x := e^{x \ln a} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}, a > 0 \tag{4.19}$$

Man nennt $x \mapsto a^x$ die **Exponentialfunktion zur Basis a.**

4.20 Satz. *Für die Exponentialfunktion zur Basis a, mit $a > 0$, gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $b > 0$*

$$\begin{aligned} a^x\, a^y &= a^{x+y}, \\ (ab)^x &= a^x\, b^x, \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} (a^x)^y &= a^{xy}, \\ \ln(a^x) &= x \ln a, \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\frac{d}{dx}\, a^x = a^x \ln a. \tag{4.23}$$

- Nun können wir auch **Potenzen** von x für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$ definieren. Aus (4.19) folgt für $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$

  $$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}. \tag{4.24}$$

  Man berechnet sofort

  $$(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \tfrac{\alpha}{x} = \alpha\, x^{\alpha - 1}. \tag{4.25}$$

- Für alle $a > 0, a \neq 1$, ist die Funktion a^x umkehrbar, denn die Gleichung $y = e^{x \ln a}$ hat für $y > 0$ die eindeutige Lösung $x = \frac{\ln y}{\ln a}$. Die Umkehrfunktion heißt **Logarithmus zur Basis** a und ist definiert durch:

  $$\begin{gathered} \ln_a : (0, \infty) \to \mathbb{R} \\ y = \ln_a(x) \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x. \end{gathered} \tag{4.26}$$

  Es gelten :

  $$\begin{aligned} \ln_a(xy) &= \ln_a(x) + \ln_a(y), \\ \tfrac{d}{dx} \ln_a(x) &= \tfrac{1}{x \ln a}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

4.28 Definition. *Die Hyperbelfunktionen* **sinushyperbolicus, cosinushyperbolicus** *und* **tangenshyperbolicus** *sind für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\begin{aligned}
\sinh(x) &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \\
\cosh(x) &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\
\tanh(x) &:= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.
\end{aligned}$$

- Aus der Definition 4.28 und den Eigenschaften der e-Funktion erhält man folgende Rechenregeln:

$$\begin{aligned}
\sinh(-x) &= -\sinh(x) \\
\cosh(-x) &= \cosh(x)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(x+y) &= \sinh(x)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y), \\
\cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y),
\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$(\cosh(x))^2 - (\sinh(x))^2 = 1. \tag{4.31}$$

Für die Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
\sinh(x)' &= \cosh(x), \\
\cosh(x)' &= \sinh(x), \\
\tanh(x)' &= \frac{1}{\cosh^2(x)}.
\end{aligned} \tag{4.32}$$

- Die Funktion $\sinh(x)$ ist auf $\mathbb{R}$ strikt monoton wachsend, also existiert eine Umkehrfunktion. Diese heißt **areasinushyperbolicus** und wird mit $\operatorname{arsinh}(x)$ bezeichnet. Die Funktion $\cosh(x)$ ist auf $\mathbb{R}_0^+$ strikt monoton wachsend. Die Umkehrfunktion heißt **areacosinushyperbolicus** und wird mit $\operatorname{arcosh}(x)$ bezeichnet. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{arsinh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \\
\operatorname{arcosh}(x) &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad x \geq 1.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

- Die Kettenregel und (4.33) liefern:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\operatorname{arsinh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \\
\frac{d}{dx}\operatorname{arcosh}(x) &= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1.
\end{aligned} \tag{4.34}
$$

Kapitel 4

Integration

Die Integration ist die Umkehroperation zur Differentation. Es wird also das Problem behandelt, wie man aus der Kenntnis der Ableitung einer Funktion die Funktion selbst wiederherstellt. Eine entscheidende Rolle bei der Lösung dieser Aufgabe spielt der Mittelwertsatz. Es wird sich zeigen, dass das Integral das geeignete Mittel zur Berechnung von Flächen- und Rauminhalten ist.

4.1 Das bestimmte Integral

• **Motivation:** Sei $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$, dann existieren nach dem Mittelwertsatz (Kapitel 3 Satz 2.4) $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Demzufolge gilt:

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{*}$$

Wenn die Zerlegung fein genug ist, kann man ξ_i durch einen beliebigen Punkt in Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ ersetzen und erhält eine gute Approximation von $f(b) - f(a)$, d.h. die rechte Seite von (*) ist eine gute Approximation des Integrals von $f'(x)$.

1.1 Die Definition des bestimmten Integrals. *Sei f eine auf dem Intervall $[a, b]$ definierte, beschränkte Funktion, die an höchstens endlich vielen*

Stellen nicht stetig ist. Solche Funktionen nennt man **stückweise stetig**. *Sei durch*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

eine **Zerlegung** *von* $[a, b]$ *in* n *Teilintervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *gegeben und seien* $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ *beliebige Zwischenpunkte. Dann heißt*

$$Z_n := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \tag{1.2}$$

die **Riemannsche Summe von** f. *Der Grenzwert der Folge* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *existiert, sofern die maximale Länge der Teilintervalle* $[x_{i-1}, x_i]$ *mit* $n \to \infty$ *gegen Null strebt. Weiterhin ist der Grenzwert unabhängig von der gewählten Zerlegung des Intervalls* $[a, b]$ *und der Zwischenpunkte* ξ_i. *Der Grenzwert der Folge* $(Z_n)_{n\geq 1}$ *heißt das* **bestimmte Integral von** f **über** $[a, b]$ *und wird mit* $\int_a^b f(x)\,dx$ *bezeichnet, d.h.*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{1.3}$$

- *Um Fallunterscheidungen zu vermeiden setzen wir*

$$\begin{aligned} \int_a^a f(x)\,dx &:= 0, \\ \int_b^a f(x)\,dx &:= -\int_a^b f(x)\,dx, \qquad b > a. \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.5 Geometrische Interpretation. *Die Riemannsche Summe eine positiven Funktion* f *ist eine Summe von Rechteckflächen, die die Fläche* I *unter dem Graph von* f *immer genauer approximiert. Also gilt*

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Genau genommen wird erst durch das Integral der Flächeninhalt definiert.

1.6 Satz. *Seien f, g stückweise stetige Funktion auf $[a,b]$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $c \in [a,b]$. Es gelten:*

a) $\int\limits_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)\, dx + \beta \int\limits_a^b g(x)\, dx,$

b) $\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_a^c f(x)\, dx + \int\limits_c^b f(x)\, dx,$

c) $f(x) \le g(x) \quad \Rightarrow \quad \int\limits_a^b f(x)\, dx \le \int\limits_a^b g(x)\, dx.$

1.7 Satz. *Sei f auf $[a,b]$ stückweise stetig.*

a) Aus $m \le f(x) \le M$ für alle $x \in [a,b]$ folgt

$$m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)\, dx \le M(b-a)\,.$$

b) Es gilt die Ungleichung

$$\Big|\int\limits_a^b f(x)\, dx\Big| \le \int\limits_a^b |f(x)|\, dx.$$

1.8 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei f auf $[a,b]$ stetig und g auf $[a,b]$ nichtnegativ und stückweise stetig. Dann gibt es ein $\xi \in [a,b]$ mit*

$$\int\limits_a^b f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x) dx.$$

- Der Spezialfall $g(x) = 1$ zeigt, dass es ein $\xi \in [a,b]$ gibt, so dass

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = f(\xi)\,(b-a). \tag{1.9}$$

1.10 Definition. *Man nennt eine auf dem Intervall I differenzierbare Funktion F eine* **Stammfunktion** *von f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.*

1.11 Satz (Haupsatz der Differential und Integralrechnung).
Ist f eine auf dem Intervall I stetige Funktion, dann gilt:

a) Die durch

$$F_a(x) := \int_a^x f(t)\, dt \qquad a, x \in I$$

definierte Funktion ist eine Stammfunktion von f, d.h.

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = f(x). \tag{1.12}$$

Jede andere Stammfunktion F von f hat die Form $F(x) = F_a(x)+c, c \in \mathbb{R}$.

b) Mit einer beliebigen Stammfunktion F von f gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a). \tag{1.13}$$

• Berechung des bestimmten Integrals:

1) Berechne die Stammfunktion F von f, d.h. $F' = f$.

2) $\int_a^b f(x) dv = F(b) - F(a)$

1.14 Definition. *Die Menge aller Stammfunktionen von f wird mit $\int f\, dx$ bezeichnet und heißt* **unbestimmtes Integral** *von f.*

• Nach Satz 1.11 a) gilt

$$\int f(x)\, dx = F + c,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist und F eine feste Stammfunktion von f. Somit haben wir

$$\int f(x)\, dx = F + c \quad \Leftrightarrow \quad F' = f. \tag{1.15}$$

- Aus den Differentationsformeln folgen somit folgende Integrationsformeln:

$F(x)$	$f(x) = F'(x)$	Bemerkungen
$\frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$	x^n	$n \neq -1$
$\ln \lvert x \rvert$	x^{-1}	$x \neq 0$
$-\cos x$	$\sin x$	
$\sin x$	$\cos x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq (k+\frac{1}{2})\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x \rvert < 1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{1}{a}\, e^{ax}$	e^{ax}	$a \neq 0$
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\lvert x \rvert \leq 1$
$\ln(x + \sqrt{1+x^2})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	

4.2 Integrationsregeln

2.1 Linearität. *Aus $F' = f, G' = g$ folgt $af + bg = aF' + bG'$. Somit gilt für das unbestimmte Integral*

$$\int \big(af(x) + bg(x)\big)\, dx = a \int f(x)\, dx + b \int g(x)\, dx. \tag{2.2}$$

2.3 Partielle Integration. *Die Produktregel $(uv)' = u'v + uv'$ liefert, dass uv eine Stammfunktion von $u'v + uv'$ ist, d.h.*

$$\int u'(x)v(x)\, dx = u\, v - \int u(x)v'(x)\, dx. \tag{2.4}$$

Für das bestimmte Integral erhalten wir

$$\int_a^b u'\, v\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b uv'\, dx. \tag{2.5}$$

- Aus (2.4) folgt mit $u' = 1$

$$\int v(x)\, dx = x\, v \;-\; \int x v'(x)\, dx, \tag{2.6}$$

insbesondere also:

$$\int \ln\, x\, dx = x\, \ln\, x \;-\; \int x \frac{1}{x}\, dx = x(\ln\, x - 1) + c. \tag{2.7}$$