- Aus (2.4) folgt mit $u' = 1$

$$\int v(x)\,dx = x\,v \;-\; \int x v'(x)\,dx, \tag{2.6}$$

insbesondere also:

$$\int \ln\, x\,dx = x\,\ln\, x \;-\; \int x\frac{1}{x}\,dx = x(\ln\, x - 1) + c. \tag{2.7}$$

- Für Integrale der Form

$$\begin{aligned}
S_n &:= \int_a^b (\sin\, x)^n\; dx, & C_n &:= \int_a^b (\cos\, x)^n\; dx, \\
A_n &:= \int_a^b x^n \sin x\,dx, & B_n &:= \int_a^b x^n \cos\, x\,dx, \\
E_n &:= \int_a^b x^n\, e^x\,dx, & L_n &:= \int_a^b (\ln\, x)^n\,dx
\end{aligned} \tag{2.8}$$

kann man durch wiederholtes Anwenden von partieller Integration eine Rekursionsformel herleiten.

2.9 Substitutionsmethode. *Aus der Kettenregel für die Ableitung* $(F(g(x))' = F'\big(g(x)\big)\,g'(x)$ *folgt mit* $f(x) = F'(x)$

$$\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + c \tag{2.10}$$

und für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f\big(g(x)\big)g'(x)\,dx = F\big(g(b)\big) - F\big(g(a)\big) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt. \tag{2.11}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten (2.11) anzuwenden.

1) Berechnung von $\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx$

- *a) Substitution* $g(x) = t\,, \quad g'(x)\, dx = dt$
- *b) Berechnung von* $\int f(t)\, dt = F(t) + c$
- *c) Rücksubstitution* $t = g(x)$ *und somit* $\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = F\big(g(x)\big)$

2) Berechnung von $\int f(x)\, dx$

- *a) Substitution* $x = g(t)\,, \quad dx = g'(t)\, dt$ *mit „geeigneter" umkehrbarer Funktion* g
- *b) Berechnung von* $\int f\big(g(t)\big) g'(t)\, dt = H(t) + c$
- *c) Auflösen von* $x = g(t)$ *nach* t*, d.h.* $t = h(x)$*, und somit ergibt sich* $\int f(x)\, dx = H\big(h(x)\big) + c$

• Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx + \varphi)\, dx = -\tfrac{1}{k}\, cos(kx + \varphi)\Big|_0^{2\pi} = 0. \tag{2.12}$$

Somit erhält man für $\varphi = 0$ oder $\varphi = -\pi$ die Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin(kx)\, dx &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \cos(kx)\, dx &= 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

falls $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sin(mx)\sin(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)\big), \\ \cos(mx)\cos(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)\big), \\ \sin(mx)\cos(nx) &= \tfrac{1}{2}\big(\sin((m+n)x) + \sin((m-n)x)\big). \end{aligned}$$

Somit gelten für $m, n \in \mathbb{Z}$ die folgenden **Orthogonalitätsbeziehungen**:

$$\int_0^{2\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{falls } m = n = 0, \\ 0 & \text{falls } m \neq n, \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 2\pi & \text{falls } m = n = 0, \\ 0 & \text{falls } m \neq n, \\ \pi & \text{falls } m = n \neq 0, \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx\,dx = 0.$$

2.15 Symmetrien. *Integrale lassen sich leichter berechnen wenn man Symmetrien des Integranden und des Integrationsbereiches beachtet. Beispiele hierfür sind gerade und ungerade Integranden. Für eine gerade Funktion, d.h. $f(-x) = f(x)$ gilt*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

und für eine ungerade Funktion, d.h. $f(-x) = -f(x)$, gilt

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

4.3 Integration rationaler Funktionen

3.1 Partialbruchzerlegung. *Sei $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine rationale Funktion mit Grad $p <$ Grad q und teilerfremden Polynomen p und q. Eine* **Partialbruchzerlegung** *besteht auf folgenden Schritten:*

1) Finden einer Faktorisierung von $q(x)$, d.h.

$$q(x) = c(x-b_1)^{k_1}\cdots(x-b_r)^{k_r}\cdots q_1(x)^{l_1}\cdots q_s(x)^{l_s}$$

mit paarweise verschiedenen, reellen Nullstellen b_j der Vielfachkeit k_j und paarweise verschiedenen, quadratischen Polynomen q_j, die keine reellen Nullstellen besitzen.

2) *Für jede Nullstelle $b \in \{b_1, \cdots, b_r\}$ der Vielfachkeit k und jedes quadratische Polynom $Q \in \{q_1, \cdots, q_s\}$ der Vielfachheit l bilden wir Funktionen der Form*

$$\frac{A_1}{x-b}, \quad \frac{A_2}{(x-b)^2}, \quad \cdots, \quad \frac{A_k}{(x-b)^k},$$
$$\frac{B_1x+C_1}{Q(x)}, \quad \frac{B_2x+C_2}{(Q(x))^2}, \quad \cdots, \quad \frac{B_lx+C_l}{(Q(x))^l}$$

wobei A_i, B_i, C_i reelle Koeffizienten sind.

3) *Diese Funktionen heißen* **Partialbrüche**. *Man setzt nun die rationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ als Summe obiger Partialbrüche an, wobei die Koeffizienten A_i, B_i, C_i zu bestimmen sind.*

- *Die dabei auftretenden Integrale berechnen sich wie folgt:*

$$\int \frac{dx}{x \pm a} = \ln|x \pm a| + c, \tag{3.2}$$

$$\int \frac{dx}{(x \pm a)^k} = \frac{1}{k-1}(x \pm a)^{1-k} + c, \qquad k \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}, \tag{3.3}$$

und falls $4q - p^2 > 0$, gilt

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + c, \tag{3.4}$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \frac{a}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}, \tag{3.5}$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k} = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}}, \tag{3.6}$$

$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \left(b - \frac{ap}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^k}. \tag{3.7}$$

3.8 Integration von $R(e^x)$**.** *Sei R eine rationale Funktion, dann kann man das Integral*

$$\int R(e^{ax})\,dx$$

durch die Substitution $t = e^{ax}, dx = \frac{1}{at}\,dt$ *auf das Integral*

$$\int R(t)\,\frac{1}{at}\,dt$$

zurückführen und somit berechnen, denn $\frac{R(t)}{at}$ *ist wiederum eine rationale Funktion.*

3.9 Integration von $R\big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)$**.** *Sei* $R(x,y)$ *ein rationaler Ausdruck in* x *und* y*, d.h.* $R(x,y)$ *entsteht aus* x, y *und Konstanten allein durch die vier Grundrechenarten. Ein Integral vom Typ* $\int R\big(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\big)\,dx$ *mit* $ad - bc \neq 0$ *wird mit der Substitution*

$$t = \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \qquad d.h.\ x = \frac{dt^k - b}{a - ct^k}, \qquad dx = k(ad-bc)\frac{t^{k-1}}{(a-ct^k)^2}\,dt$$

in ein Integral einer rationalen Funktion überführt.

3.10 Integration von $R(\sin x, \cos x)$**.** *Sei* $R(x,y)$ *ein rationaler Ausdruck. Durch die Substitution*

$$x = 2\arctan t, \quad dx = \tfrac{2}{1+t^2}\,dt$$

und somit

$$\cos x = \tfrac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \tfrac{2t}{1+t^2}$$

überführt man das Integral $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ *in ein Integral über eine rationale Funktion in* t*.*

3.11 Substitution für bestimmte Integrale. *Bei der Berechnung von bestimmten Integralen muss für die Gültigkeit der Formel*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

überprüft werden ob:

a) $f : I \to \mathbb{R}$ *stetig und beschränkt ist, wobei* I *ein abgeschlossenes Intervall ist und*

b) $g : [a, b] \to I$ *stetig differenzierbar ist.*

4.4 Uneigentliche Integrale

Wir wollen den Integralbegriff erweitern auf unbeschränkte Integrationsintervalle $[a, \infty)$ und unbeschränkte Funktionen.

4.1 Definition. *Sei* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Die Funktion* f *sei auf dem Intervall* $[a, b)$ *definiert und auf jedem abgeschlossenen Teilintervall* $[a, c], c < b$, *stückweise stetig. Falls der Grenzwert*

$$\lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx$$

existiert, wird das **uneigentliche Integral** $\int_a^b f(x)\, dx$ *definiert durch*

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\, dx.$$

In diesem Fall sagt man, dass das uneigentliche Integral **konvergiert**. *Anderenfalls sagt man, dass es* **divergiert.**

• *Analog definiert man in der entsprechenden Situation für ein rechts halboffenen Intervall* $(a, b]$

$$\int_a^b f(x)\, dx := \lim_{c \to a^+} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Beispiele:

1)

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{c \to \infty} \int_1^c \frac{dx}{x} = \lim_{c \to \infty} \ln c = \infty, \qquad \text{(divergiert)}. \tag{4.2}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0^+} -\ln c = \infty, \qquad \text{(divergiert)}. \tag{4.3}$$

2) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{1}{c^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \tfrac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(\tfrac{1}{c^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \tfrac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

4.6 Satz. *Ist f auf $[a,\infty)$ und g auf $(0,b]$ stückweise stetig und sind $\alpha, K \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

a) $|f(x)| \leq K\frac{1}{x^\alpha},\ a \leq x < \infty,\ 1 < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert,*

b) $|f(x)| \leq K\frac{1}{x^\alpha},\ 0 < x \leq b,\ 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^b f(x)\,dx$ *konvergiert.*