2) Sei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to\infty} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \tfrac{1}{c^{\alpha-1}}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha > 1, \\ \infty, & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+} \tfrac{1}{\alpha-1}\left(\tfrac{1}{c^{\alpha-1}} - 1\right) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases} \tag{4.5}$$

4.6 Satz. *Ist f auf $[a,\infty)$ und g auf $(0,b]$ stückweise stetig und sind $\alpha, K \in \mathbb{R}$, dann gilt:*

a) $|f(x)| \le K\frac{1}{x^\alpha},\ a \le x < \infty,\ 1 < \alpha \quad \Rightarrow \quad \int_a^\infty f(x)\,dx$ *konvergiert,*

b) $|f(x)| \le K\frac{1}{x^\alpha},\ 0 < x \le b,\ 0 < \alpha < 1 \quad \Rightarrow \quad \int_0^b f(x)\,dx$ *konvergiert.*

4.7 Definition. *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine auf jedem abgeschlossenen Teilintervall $[\alpha,\beta]$, $a < \alpha < \beta < b$ stückweise stetige Funktion und sei $c \in (a,b)$. Falls die beiden uneigentlichen Integrale*

$$\int_a^c f(x)\,dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^c f(x)\,dx,$$
$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_c^\beta f(x)\,dx$$

konvergieren, heißt das **uneigentliche Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ *konvergent und ist definiert durch*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4.8 Ausnahmestellen im Innern. *Sei f auf $[a,b]$ definiert und sei $c \in (a,b)$ ein Punkt so, dass f auf $[a,c)$ und $(c,b]$ stückweise stetig ist. Falls die uneigentlichen Integrale $\int_a^c f(x)\,dx$ und $\int_c^b f(x)\,dx$ konvergieren setzen wir*

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Analog wird der Fall endlich vieler solcher „Ausnahmepunkte" $x_i \in [a,b]$ behandelt.

4.9 Cauchyscher Hauptwert. *Es kann passieren, dass die beiden uneigentlichen Integrale aus 4.8 divergieren, aber dass der Grenzwert*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right) \tag{4.10}$$

existiert. In diesem Fall wird der Grenzwert in (4.10) **Cauchyscher Hauptwert** *genannt und mit*

$$CHW\int_a^b f(x)\,dx$$

bezeichnet.

4.5 Kurven-, Längen- und Flächenmessung

5.1 Definition. *Unter einer* **Kurve** *versteht man eine differenzierbare Abbildung eines Intervalls I in die Ebene. Sei der $\mathbb{R}^2$ mit einem festen kartesischen Koordinatensystem versehen. Dann nennt man die vektorwertige Funktion*

$$\vec{r} : [a,b] \;\to\; \mathbb{R}^2 : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

wobei $x : [a,b] \to \mathbb{R}, y : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen sind, eine **Parameterdarstellung** *der Kurve, t den* **Parameter** *und $[a,b]$ das* ***Parameterintervall***.

- Die Darstellung (5.2) ist äquivalent zu den Gleichungen

$$x = x(t), y = y(t), \qquad t \in [a,b]\,. \tag{5.3}$$

- Jede Kurve besitzt unendlich viele Parameterdarstellungen.
- Ein Kreis K mit Radius r rollt auf der x-Achse. Der Punkt P mit Abstand a vom Kreismittelpunkt beschreibt eine **Zykloide**, die die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= rt - a\sin t, \\ y &= r \;\; - a\cos t, \end{aligned}$$

hat, wobei t der Rollwinkel ist.

5.4 Definition. *Zu jeder Parameterdarstellung $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ einer Kurve K definiert man den* **Tangentialvektor**

$$\dot{\vec{r}}(t) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \big(\vec{r}(t+h) - \vec{r}(t)\big) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}, \tag{5.5}$$

wobei der Punkt die Ableitung nach t bedeutet.

- Wenn $\vec{r}(t)$ die Bewegung eines Massenpunktes auf einer Kurve beschreibt, dann beschreibt $\dot{\vec{r}}(t)$ die Geschwindigkeit des Punktes zum Zeitpunkt t.
- Sei in einem Kurvenpunkt $(x(t), y(t))^T$ der Tangentialvektor $\dot{\vec{r}}(t) \neq \vec{0}$. Der **Normalenvektor** $\vec{n}(t)$ entsteht aus dem Tangentialvektor durch Drehung um $90°$ in positive Richtung, d.h.

$$\vec{n}(t) := \begin{pmatrix} -\dot{y}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

- Zum Zeitpunkt t_0 haben die Tangente bzw. Normale an die Kurve K die Darstellung

$$\begin{array}{lll} \text{Tangente:} & x = x(s) = x(t_0) + s\dot{x}(t_0), & y = y(s) = y(t_0) + s\dot{y}(t_0), \\ \text{Normale :} & x = x(s) = x(t_0) - s\dot{y}(t_0), & y = y(s) = y(t_0) + s\dot{x}(t_0), \end{array}$$

  wobei $s \in \mathbb{R}$ der Geradenparameter ist.

5.7 Die Bogenlänge. *Sei $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ eine äquidistante Zerlegung von $[a, b]$, d.h. $t_i - t_{i-1} = \Delta t$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Die Kurve K wird durch die Sekanten, die $(x(t_i), y(t_i))$ und $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$ verbinden, angenähert. Die Länge dieser Approximation ist*

$$P_n := \sum_{i=1}^{n} \|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\|.$$

Falls der Grenzwert $n \to \infty$ der Folge $(P_n)_{n \geq 1}$ exitstiert wird er **Länge der Kurve** *K genannt.*

5.8 Definition. *Eine Parameterdarstellung $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\quad t \in [a, b]$ einer Kurve heißt* **regulär**, *wenn die Funktionen $t \mapsto x(t)$, $t \mapsto y(t)$ stetig differenzierbar sind und $\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt, dabei sind die Ableitungen in den Endpunkten einseitige Ableitungen.*

5.9 Satz. *Die Länge L einer Kurve mit regulärer Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ \dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) \neq 0,\ a \le t \le b$, beträgt*

$$L = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt. \tag{5.10}$$

5.11 Folgerung. *Der Graph $y = f(x)$ einer stetig differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ hat die Länge*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx. \tag{5.12}$$

5.13 Krümmung. *Es sei $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))^T$ eine reguläre, zweimal differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve. Mit $\varphi(t)$ bezeichnen wir den positiv gemessenen Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Tangentialvektor $\vec{r}$, sei $s(t) := \int_a^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)}\, d\tau$ die Länge des Kurvenstücks über dem Parameterintervall $[a, t]$. Die Änderung $\Delta\varphi$ bezogen auf die Änderung der Länge Δs ist ein Maß für die durchschnittliche Krümmung der Kurve. Demzufolge definiert man die* **Krümmung** *der Kurve im Punkt $P = (x(t), y(t))^T$ als*

$$K(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta s(t)} = \frac{\dot{\varphi}(t)}{\dot{s}(t)}.$$

5.14 Satz. *Die Krümmung einer Kurve mit regulärer, zweimal differenzierbarer Parameterdarstellung $x = x(t),\ y = y(t),\ \ t \in [a, b]$, beträgt im Kurvenpunkt $P(t) = (x(t), y(t))^T$*

$$K(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \dot{y}(t)\ddot{x}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{\frac{3}{2}}}\,. \tag{5.15}$$

5.16 Folgerung. *Die Krümmung des Graphen $y = f(x)$ einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x, f(x))$ beträgt*

$$K(x) = \frac{f''(x)}{\left(\sqrt{1 + (f')^2(x)}\right)^3}\,. \tag{5.17}$$

• Einen durch den Kurvenpunkt $P = (x(t), y(t))^T$ gehenden Kreis nennt man **Krümmungskreis** der Kurve in P, wenn er dieselbe Krümmung und denselben Tangentialvektor wie die Kurve besitzt. Der Radius r des Krümmungskreises heißt **Krümmungsradius** in P und ist gegeben durch:

$$r = \frac{1}{|K|}\,.$$

5.18 Polardarstellung einer Kurve. *Analog zu den komplexen Zahlen kann man für eine mit einem kartesischen Koordinatensystem versehene Ebene Polarkoordinaten einführen. Sei $P = (x, y)$ ein Punkt in der Ebene, dann sind der Abstand r des Punktes vom Ursprung und der Drehwinkel φ, der den Punkt $(r, 0)$ in (x, y) überführt, die* **Polarkoordinaten** *von P. Wir haben folgende Beziehungen:*

$$a)\quad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi,$$

$$b)\quad r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \qquad \varphi = \begin{cases} \arccos\dfrac{x}{r}, & \text{falls } y \ge 0,\\ 2\pi - \arccos\dfrac{x}{r}, & \text{falls } y < 0,\\ \text{unbestimmt}, & \text{falls } r = 0. \end{cases}$$

• Wenn ein Zeiger mit Fußpunkt im Ursprung, der seine Länge ändert, sich um den Ursprung bewegt, erhalten wir eine Kurve. Die Parameterdarstellung

$$r = r(\varphi)\ ,\ \alpha \le \varphi \le \beta$$

der Kurve mit Parameter φ heißt **Polardarstellung**, wobei der Winkel φ von der positiven x-Achse aus gemessen wird. Aus der Polardarstellung $r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$ erhält man folgende Parameterdarstellung mit dem Polarwinkel φ als Parameter

$$x = r(\varphi)\cos\varphi, \quad y = r(\varphi)\sin\varphi, \quad \varphi \in [\alpha, \beta]. \tag{5.19}$$

Aus Satz 5.9 erhält man für die Länge der Kurve $r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha, \beta]$

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \left(\frac{d\,r(\varphi)}{d\,\varphi}\right)^2}\, d\varphi\,.$$

5.20 Satz. *Sind* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig,* $a < b$*, dann beträgt der Inhalt der von den vier Kurven* $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$, $x = b$ *berandeten Fläche*

$$F = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx. \tag{5.21}$$

5.22 Satz. *Ist* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}_+^0$ *stetig,* $\alpha < \beta$*, dann beträgt der Inhalt der von den drei Kurven* $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ *berandeten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\varphi) \, d\varphi$$

5.23 Satz. *Ist* $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ *eine stückweise stetig differenzierbare Parameterdarstellung einer Kurve* K*, die von jedem Ursprungsstrahl höchstens einmal getroffen wird, dann beträgt der Inhalt der durch* K *begrenzten Sektorfläche*

$$F = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t)) \, dt \right|.$$